Economic theories of committees(2)

会議の経済理論（2）[1]

森谷　文利

4. 戦略的アプローチ

4.1 問題の所在

ここまで，(i)自身の得た情報に基づいて投票を行う（情報的投票行動）と(ii)追加的費用なしに会議のメンバーは情報を獲得できる，という 2 つの仮定のもとで，分析を進めてきた[2]。そのうえで，次の結論を得た。

- 仮定２，３ が満たされている下では，最適メカニズムは閾値投票ルールで再現できる。
- 仮定２，３，４ が満たされている下では，会議の人数nを大きくすると，「無罪の人を有罪としてしまう確率」と「有罪の人を無罪してしまう確率」は0に収束する（陪審定理，以下 CJT）。

では，仮定(i)を緩和し，プレーヤーの戦略性を考慮したとしても上記の結果は成立するのだろうか。本節では，具体的には以下の 3 つの問題を考えよう。

1. 情報的投票行動が均衡戦略になるだろうか。もし，なるとしたらどのような条件だろうか。
2. もし，条件が満たされず，情報的投票行動が均衡戦略とならない場合，どのような戦略が均衡になるのだろうか。
3. 上記の均衡で人数が増えると陪審定理は成立するのだろうか。

本節であつかう「戦略性」とは，2 種類の投票者間の利害対立を基礎として

[1] 本研究は関西ゲーム理論研究会と Economics Workshop で報告した。研究会でコメントをしてくれた参加者及び匿名レフェリーの二人に感謝したい。また，本研究は JSPS 科研費 25780189 の助成を受けたものである。
[2] 本稿は森谷(2011) の続編である。これまでの議論の詳細は森谷(2011) を参照してほしい。

いる。１つ目は，誤った選択をした費用が投票者によって異なることである。冤罪を強く嫌う投票者は有罪への投票に慎重になるかもしれないし，逆に犯罪者が刑罰を逃れることを嫌う投票者は無罪に投票しにくくなるかもしれない。こうした点を表現するため，モデルでは，「無罪の人を有罪としてしまう費用」を$\lambda_1(x)$，「有罪の人を無罪としてしまう費用」を$\lambda_2(x)$としていたが，パラメータxの値が投票者によって異なることを想定する。つまり，投票者iのパラメータをx_iとすると，二人の投票者i, jについて$x_i \neq x_j$が成立している場合を考える。

２つ目は，プレーヤー間で異なる情報を受け取っていることである。「有罪でありそうだ」というシグナル（$\sigma^i = G$）を受け取っている投票者と「無罪でありそうだ」というシグナル（$\sigma^i = I$）を受け取っている投票者の間では，最終決定に対して好みが異なっている[3]。

また，本節ではメカニズムを閾値投票ルールに限定して議論する。閾値投票ルール$\bar{k}$とは，有罪に投票する人がk人以上の場合には有罪と決定し，それ以外の場合は無罪と決定することである。すなわち，有罪に投票した人がkであるとすると

$$d(k) = \begin{cases} 1 & if\ k \geq \bar{k} \\ 0 & if\ k < \bar{k} \end{cases}$$

である。

本節の構成は以下の通り。4.2 節では情報的投票行動が均衡になる条件を検討する。4.3 節では，条件が満たされない場合に存在する「対称混合戦略均衡」について考える。ここでは全会一致ルールの下では CJT は成立しないが，それ以外の場合には成立することがわかる。4.4 節では次節の準備として，非対称な純粋戦略均衡が存在することを説明する。4.5 節は4節全体のまとめである。

4.2　情報的投票行動と陪審定理

4.2.1 情報的投票の均衡条件

本節では情報的投票行動が均衡[4]になる条件を考えるために，投票者が３人での場合を考えよう（$n = 3$）。さらに，多数決ルールを採用しているとする。つまり，

---

[3] 前者のみを利害対立と呼ぶことが一般的である。しかし，会議の経済学では前者よりも後者の利害対立を取り扱う場合が多い。本稿では，Austen-Smith and Banks (1996) に従い，これも利害対立の一つとして取り扱う。

[4] ここでいう均衡とはベイジアンナッシュ均衡である。本稿では特に断りがない限り，ベイジアンナッシュ均衡のことを単に均衡と呼ぶ。

$$d(k) = \begin{cases} 1 & if\ k \geq 2 \\ 0 & if\ k < 2 \end{cases}$$

である。

最初にiさんの期待利得を求めよう。まず，iさんは有罪・無罪についてのシグナルσ^iを受け取っているので，真の状態に対して信念を$g(s)$から$g(s \mid \sigma^i)$にベイズ改定する。さらに，iさん以外の二人の行動についてありうる可能性は三つであるので，それぞれの確率を計算すると以下のようになる。

a.　二人とも「有罪」に投票している場合

$$\binom{2}{2}\left(g\left(G \mid \sigma^i\right)p_G^2 + g\left(I \mid \sigma^i\right)(1-p_I)^2\right)$$

b.　二人とも「無罪」に投票している場合

$$\binom{2}{0}\left(g\left(G \mid \sigma^i\right)(1-p_G)^2 + g\left(I \mid \sigma^i\right)p_I^2\right)$$

c.　一人が「有罪」に投票し，一人が「無罪」に投票している場合

$$\binom{2}{1}\left(g\left(G \mid \sigma^i\right)(1-p_G)p_G + g\left(I \mid \sigma^i\right)p_I(1-p_I)\right)$$

である。それぞれの確率の第 1 項目が真の状態が有罪の場合，第 2 項目が無罪の場合である。確率を計算する際に，2 人が情報的投票行動を選択していることを想定している。例えば，情報的投票行動の下で 2 人とも「有罪」に投票するためには，二人は$\sigma^j = G$というシグナルを観察する必要がある。したがって，真の状態が「有罪」の時に 2 人ともシグナルGが出る確率$g\left(G \mid \sigma^i\right)p_G^2$と真の状態が「無罪」の時に 2 人ともシグナル$G$が出る確率$g\left(I \mid \sigma^i\right)(1-p_I)^2$を加えたものになっている。

ここで注意したいのは，iの投票行動によらず，a と b の場合では最終決定は変わらないことである。例えば，a の場合では，すでに二人が「有罪」に投票しているので，たとえiが無罪に投票したとしても最終決定は有罪になる。b の場合も同様に最終決定は無罪である。他方，c の場合では票が割れているので，iの投票が最終決定になる。c のようにiさんの投票によって決定が変わる状態のことを Pivotal であるという。

以上から，σ^iを受け取った後のiさんの期待利得は，iのGに投票する混合戦略$\pi^i(G \mid \sigma^i)$に対して

$$-\binom{2}{2}g\big(\,I\mid\sigma^i\,\big)(1-p_I)^2\lambda_1(x_i)-\binom{2}{0}g\big(\,G\mid\sigma^i\,\big)(1-p_G)^2\lambda_2$$

$$-\binom{2}{1}\Big[g\big(\,G\mid\sigma^i\,\big)(1-p_G)p_G\left(1-\pi^i\big(\,G\mid\sigma^i\,\big)\right)\lambda_2(x_i)$$

$$+\,g\big(\,I\mid\sigma^i\,\big)(1-p_I)p_I\pi^i\big(\,G\mid\sigma^i\,\big)\lambda_1(x_i)\Big]$$

と表現できる。

次に，iが情報的投票行動を採用する条件を考えよう。期待利得の式からわかるように，iのインセンティブに影響を与えるのは，pivotal であるとき，つまり，第三項だけである。「Gというシグナルを受け取とった時，有罪に投票するする（$\pi^i(\,G\mid G\,)=1$）」条件は，

$$g(\,G\mid G\,)(1-p_G)p_G\lambda_2(x_i)\geq g(\,I\mid G\,)(1-p_I)p_I\lambda_1(x_i)$$
$$\leftrightarrow\ \frac{g(\,G\mid G\,)(1-p_G)p_G}{g(\,I\mid G\,)(1-p_I)p_I}\geq\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}$$

であり, $g(\,G\mid G\,)=\frac{g(G)p_G}{g(G)p_G+g(I)(1-p_I)}$, $g(\,I\mid G\,)=\frac{g(I)(1-p_I)}{g(G)p_G+g(I)(1-p_I)}$であるので,

$$L(3,2)=\frac{g(G)(1-p_G)p_G^2}{g(I)(1-p_I)^2p_I}\geq\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}$$

ここで$L(3,2)$は 3 人中 2 人がGを観察したときに真の状態がGである尤度比を反映している[5]。同様に「Iというシグナルを受け取ったときに無罪に投票する（$\pi^{\mathrm{i}}(\,I\mid I\,)=1$）」条件は,

$$\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}\geq\frac{g(\,G\mid G\,)(1-p_G)^2p_G}{g(\,I\mid G\,)(1-p_I)p_I^2}=L(3,1)$$

である。二つの式をまとめると

$$L(3,2)\geq\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}\geq L(3,1)$$

となる。

定理3. 仮定２，３ が成立しているとしよう。$\overline{k}$の閾値投票ルールのもとで情報的投票行動が均衡になる必要十分条件は，すべてのiについて

$$\boldsymbol{L\big(n,\overline{k}\big)\geq\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}\geq L\big(n,\overline{k}-1\big)}\qquad(1)$$

[5] ある情報σを観察した場合の有罪の尤もらしさ（尤度比）を$l(\,G\mid\sigma\,)/l(I\mid\sigma)$とすると，$L(\sigma)=\frac{g(G)}{g(I)}\times\frac{l(\,G|\sigma\,)}{l(\,I|\sigma\,)}$となる。$g(G)$と$g(I)$が固定されていたとすると, $L(\sigma)$は尤度比と比例的な関係にある。

である。

[証明]

n人の投票者がいて$\bar{k}$以上で有罪が決まる一般的である状況では，pivotal である状況は，$n-1$人中，$\bar{k}-1$人が有罪に投票している場合である。よって，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n-1\geq k\geq \bar{k}} \binom{n-1}{k} g(\, I \mid \sigma^i\,)(1-p_I)^k p_I^{n-1-k}\lambda_1(x_i) \\
&\quad -\sum_{n-1\geq k\geq \bar{k}} \binom{n-1}{k} g(\, G \mid \sigma^i\,)(1-p_G)^{n-1-k} p_G^{n-1-k}\lambda_2(x_i) \\
&\quad -\binom{n-1}{\bar{k}-1}\Big[g(\, G \mid \sigma^i\,)(1-p_G)^{n-\bar{k}} p_G^{\bar{k}-1}\Big(1-\pi^i(\, G \mid \sigma^i\,)\Big)\lambda_2(x_i) \\
&\quad + g(\, I \mid \sigma^i\,) p_I^{n-1-\bar{k}}(1-p_I)^{\bar{k}-1}\pi^i(\, G \mid \sigma^i\,)\lambda_1(x_i)\Big]
\end{aligned}
$$

iの投票によって変化するのは第三項のみであるので，「Gというシグナルを受け取とった時，有罪に投票する（$\pi^i(\, G \mid G\,)=1$）」条件は，

$$L(n,\bar{k}) \geq \frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}$$

「Iというシグナルを受け取ったときに無罪に投票する（$\pi^i(\, I \mid I\,)=1$）」条件は，

$$\frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)} \geq L(n,\bar{k}-1)$$

である。

Q.E.D.

本定理は，二つのことを示唆している。一つは，判断を誤ったときの費用が投票者の間で全く同じであったとしても（$x_1=\cdots=x_n$），情報的投票行動は最適戦略になるとは限らないことである。実際，定理の条件は

$$L(n,\bar{k}) \geq \frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)} \geq L(n,\bar{k}-1)$$

となる。プレーヤー間で異なるシグナルを受け取っていることが利害対立をもたらし，情報的戦略行動が最適戦略にならないからである。

さらに，最適メカニズムを採用していたとしたら，情報的投票行動は均衡戦略になっていることがわかる。実際，不等式(1) は，最適メカニズムであるk^*

（前稿の命題１の条件式）と一致していることがわかる。

系 2 (Austen-Smith and Banks 1996). 仮定２，３が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$x_1 = \cdots = x_n$）としよう。情報的投票行動が均衡になる必要十分条件は，$\bar{k} = k^*$ である。

ここで興味深いのは，投票者は自分のシグナルσ^iしか観察していないにも関わらず，すべての投票者の情報を織り込んだ条件と同じになっていることである。この点を詳しく見るため，次節では「pivotal であること」がどんな影響をもたらしているかを考えよう。

4.2.2　情報的投票行動と誠実投票

前節の結果は，「自身の投票行動は，Pivotal でのみ影響をあたえる」ことが結果に大きな影響を与えている。陪審定理を考察する前に本節ではこの点を明確にしておこう。
「Pivotal」であるということを取り除いた投票行動として次のような誠実投票 [Sincere Voting] を定義する。

定義 1. 誠実投票[Sincere Voting] とは，$E\left[u(1,s,x_i) \mid \sigma^i\right] \geq E\left[u(0,s,x_i) \mid \sigma^i\right]$ の時に，$\pi^i\left(G \mid \sigma^i\right) = 1$を選び，逆の時に$\pi^i\left(I \mid \sigma^i\right) = 1$を選ぶことである。

誠実投票では，自身のシグナルσ^iを受け取った後の期待値を最大にするような決定に投票することである。この条件では,「自身の有罪・無罪の投票が最終決定になる」ことを（仮に）想定しているので, 前節の均衡戦略と異なり,「Pivotal な状況であるかどうか」は投票行動に影響を与えていない。

誠実投票の下で，$\sigma^i = G$の時に有罪に投票をする条件は,

$$-\frac{g(I)(1-p_I)}{g(G)p_G + g(I)(1-p_I)}\lambda_1(x_i) \geq -\frac{g(G)p_G}{g(G)p_G + g(I)(1-p_I)}\lambda_2(x_i)$$

$$\leftrightarrow L(1,1) \equiv \frac{g(G)p_G}{g(I)(1-p_I)} \geq \frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}$$

である。$L(1,1)$は一つのシグナルのうち，Gが一度出た場合のGの尤もらしさであった。したがって，上記の条件は自身の受け取ったシグナルのみを情報として利用し意思決定していることがわかる。これに対して，3 人の会議の多数

決ルール（$n=3,\bar{k}=2$）では，$\sigma^i = G$の時に有罪に投票をする条件は，

$$L(3,2) \geq \frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)}$$

であった。この場合，自身の投票行動が影響を与えるのはPivotalの場合のみ——「二人のシグナルがGとIに分かれている」状況——であるから，この情報を利用することできる[6]。自身のシグナルもあわせて，3 人中2 人がGがシグナルとして実現していることを「わかって」いるのである。まとめると，自分以外のシグナルを直接観察することはできないが，Pivotal な状況のみの投票行動が最終結果に影響をあたえるので，あたかも他の人のシグナルを観察できる場合の条件式と同様になっているのである。

4.2.3　陪審定理

会議の人数nに対する影響を見ておこう。但し，ここでは情報的投票行動が均衡になっている状況のみを考える。

系3 (Austen-Smith and Banks 1996). 仮定２，３，４が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$）としよう。もし，最適な閾値投票ルールを採用していたとしたら($\boldsymbol{\bar{k} = k^*}$), CJT が成立している。

前の結果から，情報的投票行動が最適戦略であることがわかっていた。この場合，CJT の前提を満たしているので，会議の人数nが大きくなった時,「無罪の人を有罪としてしまう確率」と「有罪の人を無罪してしまう確率」は0 に収束する。

但し，会議の人数 n ごとに投票ルールの閾値$\bar{k}$を変化させなければならないことに注意されたい。情報的投票行動が均衡であり続けるためには, $\boldsymbol{\bar{k} = k^*}$ である必要があったからである。

4.3　対称混合戦略均衡と陪審定理

では，閾値投票ルールが最適でなかった場合（$\bar{k} \neq k^*$）はどのようになるのであろうか。本節ではどのような均衡が実現するかを考え，会議の人数が増え

---

[6] 仮定2 と仮定3 から，Gのシグナルを受け取った数は$\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$の十分統計量になっている。前稿p.20 を参照のこと。

たときに陪審定理が成立するかどうかを考えよう[7]。Feddersen and Pesendorfer (1998) に従って，以下の二つの点に注目する。一つは，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$x_1 = \cdots = x_n \equiv x$）とする。本モデルによる投票者間の利害対立は，$x_i$によるものと，シグナルの差異によるものがあったが，前者は捨象して考える。二つ目は対称混合戦略均衡に注目する。つまり，$\pi^1(G \mid G) = \cdots = \pi^n(G \mid G)$, $\pi^1(G \mid I) = \cdots = \pi^n(G \mid I)$である。表記を簡単にするため，シグナル$G$を受け取ったとき$G$に投票する混合戦略を$\pi_G$，シグナル$I$を受け取ったとき$I$に投票する混合戦略を$\pi_I$とする。

4.3.1　全会一致ルール

最初に，全会一致ルールを考える（$\bar{k} = n$）。また，

$$L(n, n-1) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n, 0)$$

を仮定する。$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$の上限は，全会一致ルールが最適メカニズムでないことと同時に，定理 3 から情報的投票行動が均衡戦略にならない条件になっている。また，下限は常に有罪が最適にならない条件になっている[8]。

■期待利得

4.2 節と同様に，戦略の最適性を考えるためには，Pivotal である状態の期待利得をもとめよう。Gというシグナルを受け取った場合の（Pivotal の）期待利得は

$$-\binom{n-1}{n-1}\left[g(G \mid G)\gamma_G^{n-1}(1-\pi_G)\lambda_2(x) + g(I \mid G)\gamma_I^{n-1}\pi_G\lambda_1(x)\right] \qquad (2)$$

ここで，

$$\gamma_G \equiv p_G\pi_G + (1-p_G)(1-\pi_I), \qquad \gamma_I \equiv p_I(1-\pi_I) + (1-p_I)\pi_G$$

である。(2) について２つの点に注目してほしい。4.2 節では，他の投票者が情報的投票行動をとっていることを所与として最適反応をとっていたので，Pivotal になる確率はシグナルの出現確率のみによって定まっていた。しかし，本節では対称混合戦略均衡を考えているので，π_Gとπ_Iから定義されるγ_Gとγ_Iに依存している。例えば，真の状態がGの場合，有罪に投票する確率γ_Gは，有罪

---

[7] Feddersen and Pesendorfer (1998) では$g(I) = g(G) = \frac{1}{2}, p_G = p_I = p, \lambda_1(x) = q, \lambda_2(x) = 1-q$の時を考えているので，以下の結果はFeddersen and Pesendorfer (1998) を一般化した結果になっている。

[8] 前稿の命題 1 を参照。

のシグナルを受け取ってGに投票する確率($p_G\pi_G$)と，無罪のシグナルを受け取ってGに投票する確率($(1-p_G)(1-\pi_I)$) を足し合わせたものになっている。γ_Iも同様である。

また，全会一致ルールであるので，自分の投票が結果を変化させる（Pivotal）ためには，自分以外の$n-1$人が有罪に投票しなくてはならない。したがって，真の状態が G である場合の Pivotal になる確率はγ_Gの$n-1$乗となるし，真の状態がIである場合の確率はγ_Iの$n-1$乗である。

同様の計算によって，Iというシグナルを受け取った場合の期待利得も

$$-\binom{n-1}{n-1}\left[g(G\mid I)\gamma_G^{n-1}(1-\pi_G)\lambda_2(x)+g(I\mid I)\gamma_I^{n-1}\pi_G\lambda_1(x)\right] \tag{3}$$

と表現できる。

■混合戦略均衡の導出

なぜ, 混合戦略が均衡でなくてはならないかを３人のケースで考えてみよう。今，仮に他の２人の投票者が情報的投票行動をとっていたとする。この時，本節の仮定の下では，有罪というシグナルを受け取り，有罪に投票する条件は満たしているものの，無罪というシグナルを受け取り，無罪に投票をする条件は満たしていない。全会一致ルールの下では，自身の投票が Pivotal になるためには，他の人がすべて有罪のシグナルを受け取っていなければならないが，そのようなときに，自身だけ無罪のシグナルを受け取っても，無罪とは信じられないからである。つまり，

$$\begin{aligned}&\left(Gに投票したときの利得\right)-\left(Iに投票したときの利得\right)\\&\qquad=-g(G\mid I)p_G^2\lambda_{2(x)}+g(I\mid I)(1-p_I)^2\lambda_{1(x)}>0\end{aligned}$$

が成立している。これが情報的投票行動が均衡戦略とならない理由である。

では，どのようにすれば均衡になるのだろうか。Pivotal であるときの情報量が大きすぎることが原因だったので，一つのアイディアは投票者がノイズを加えることである。つまり，無罪のシグナルを受け取っていても一定確率で有罪に投票することで，Pivotal である時に有罪である可能性を引き下げ，自身のシグナルを反映した投票行動を促すのである。

実際に計算してみると，他の投票者が混合戦略を採用していた場合，

$$\left(Gに投票したときの利得\right)-\left(Iに投票したときの利得\right)$$
$$=-g(G \mid I)\gamma_G^2\lambda_{2(x)}+g(I \mid I)(1-\gamma_I)^2\lambda_{1(x)}$$

となる。$\pi_G=1$とすると，γ_{G}とγ_{I}は，

$$\gamma_{\mathrm{G}}=p_G+(1-p_G)(1-\pi_I), \qquad 1-\gamma_I=p_I\pi_I$$

である。$1-\pi_I$を大きくすることで，二つの戦略の利得を無差別に近づけることが可能である。したがって，次のような対称混合戦略均衡を導出することができる。

命題2. 仮定２，３が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$x_1=\cdots=x_n$）としよう。さらに，$L(n,n-1)\geq\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\geq L(n,0)$が成立しているとする。全会一致ルールを採用している場合，対称混合戦略均衡(π_G^U,π_I^U)は

$$\boldsymbol{\pi_G^U=1,\pi_I^U=\frac{\alpha-1}{\alpha p_I-(1-p_G)}}$$

である。ここで，$\alpha=\left(\frac{g(I)p_I\lambda_1(x)}{g(G)(1-p_G)\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$である。

[証明]

まず，「もし，$1\geq\pi_I^U>0$だとしたら，$\pi_G^U=1$である」ことを示そう。もし，$1\geq\pi_I^U>0$だとすると，無罪のシグナルを受け取り，「有罪への投票したときの利得」と「無罪へ投票した場合の利得」が同じか，後者のほうが大きくならなくてはならない。(3) よりその条件は

$$\gamma_G^{n-1}\lambda_2(x)\geq\frac{g(I \mid I)}{g(G \mid I)}\gamma_I^{n-1}\lambda_1(x) \tag{4}$$

である。なお，$1>\pi_I^U>0$の時，等号で成立する。

「有罪のシグナルを受け取り，有罪への投票したときの利得」から「有罪のシグナルを受け取り，無罪への投票したときの利得」を引くと

$$-g(I \mid G)\gamma_I^{n-1}\lambda_1(x)+g(G \mid G)\gamma_G^{n-1}\lambda_2(x)$$
$$\geq -g(I \mid G)\gamma_I^{n-1}\lambda_1(x)+g(G \mid G)\left(\frac{g(I \mid I)}{g(G \mid I)}\gamma_I^{n-1}\lambda_1(x)\right)$$
$$=g(G \mid G)\gamma_I^{n-1}\lambda_1(x)\left[\frac{g(I \mid I)}{g(G \mid I)}-\frac{g(I \mid G)}{g(G \mid G)}\right]\geq 0$$

最初の不等式は(4)から，最後の不等式は$\frac{g(I|I)}{g(G|I)}>\frac{g(I|G)}{g(G|G)}$から示せる。よって，

$\pi_G = 1$が最適戦略になる。

つぎに，π_I^Uを求めよう。$\pi_G^U = 1$であるので，

$$\gamma_G = p_G + (1 - p_G)(1 - \pi_I), \qquad \gamma_I = p_I(1 - \pi_I) + (1 - p_I)$$

である。これを等号で成立した(4) に代入すると

$$\frac{p_G + (1 - p_G)(1 - \pi_I)}{p_I(1 - \pi_I) + (1 - p_I)} = \left(\frac{g(I)p_I\lambda_1(x)}{g(G)(1 - p_G)\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

これをπ_Iについて整理すると命題の式が求まる。また，$1 > \pi_I^U > 0$とする条件は，

$$L(n, n-1) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n, 0)$$

となり，満たしていることがわかる。

Q.E.D.

■会議人数$\boldsymbol{n}$に対する変化

では，nが増えた時にどのようになるかを考えよう。まず，言えることは，nが大きくなるほどαは1に近づくので，π_I^Uが0に近づく。つまり，無罪というシグナルを受け取っても，有罪に投票する確率は1に収束する。これは混合戦略均衡が成立するために必要である。nが大きいということは，Pivotal である場合に多くの投票者の情報を集約しているので，有罪である可能性が高くなる。このため，より情報量を減らすため，π_I^Uは小さくしなければならなくなるからである。

さらに，nが大きくなるほど，冤罪の可能性は大きくなることがわかる。nが増えると，それだけ多くの情報に基づいて判断できるという効果の一方で，混合戦略均衡では無罪というシグナルを受け取っても，有罪に投票する確率が高くなる。したがって，冤罪確率の増減は両者のトレードオフで決まるが，全会一致ルールの場合には，後者の効果が大きくなるので，冤罪の可能性が大きくなる。

まとめると以下の通りである。

定理4. 仮定２，３が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$）としよう。さらに，$\boldsymbol{L(n, n-1) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n, 0)}$が成立しているとする。全会一致ルールを採用している場合，対称混合戦略均

衡(π_G^U, π_I^U)において，以下のことが成立している。

1. ***無罪のシグナルを受け取っても，有罪に投票する確率は1 に収束する。***

$$\lim_{n\to\infty}(1-\pi_I^U)=1$$

2. ***冤罪の可能性は0 に収束しない。***

$$\lim_{n\to\infty}(\gamma_I)^n\neq 0$$

[証明]

「1.」は明らかであるので，ここでは「2.」のみを証明しよう。まず，冤罪の確率はπ_G^U, π_I^Uを代入することで

$$(\gamma_I)^n=(p_I(1-\pi_I)+(1-p_I)\pi_G)^n=\left(\frac{1}{\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\alpha-\frac{1-p_G}{p_I+p_G-1}}\right)^n$$

となる。ここで新しい表記として以下を定義する。

$$f=\frac{g(G)(1-p_G)\lambda_2(x)}{g(I)p_I\lambda_1(x)},\quad h=\frac{p_I}{p_I+p_G-1}f^{-\frac{1}{n-1}}-\frac{1-p_G}{p_I+p_G-1}$$

$(\gamma_I)^n=\frac{1}{h^n}$であるので，$\lim_{n\to\infty}h^n\neq 0$となると，$\lim_{n\to\infty}(\gamma_I)^n\neq 0$が成立する。

はさみうちの原理で証明をする。まず，$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\geq L(1,0)$であるので$f\in(0,1)$，である。この時,

$$1+\frac{-1}{n}\ln f\geq f^{-\frac{1}{n-1}}\geq 1+\frac{-1}{n-1}\ln f \tag{5}$$

が成立する。(5) を使うと，

$$h\geq\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\left(1-\frac{-1}{n-1}\ln f\right)-\frac{1-p_G}{p_I+p_G-1}=1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n-1}\ln f$$

である。両辺をn乗すると，

$$h^n\geq\left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n-1}\ln f\right)^n$$

任意のnについて成立するので，$\lim_{n\to\infty}h^n\geq\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n-1}\ln f\right)^n$である。

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$を使うと，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n-1}\ln f\right)^n=f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}}$である。

よって，

$$\lim_{n\to\infty} h^n \geq f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}}$$

次に上限を考える。(5) を使うと，

$$h \leq \frac{p_I}{p_I+p_G-1}\left(1-\frac{-1}{n}\ln f\right)-\frac{1-p_G}{p_I+p_G-1} = 1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n}\ln f$$

である。両辺をn乗すると，

$$h^n \leq \left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n}\ln f\right)^n$$

任意のnについて成立するので，$\lim_{n\to\infty} h^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n}\ln f\right)^n$である。

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$を使うと，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{p_I}{p_I+p_G-1}\right)\frac{-1}{n}\ln f\right)^n = f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}}$である。

よって，

$$\lim_{n\to\infty} h^n \leq f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}}$$

以上より，

$$f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}} \geq \lim_{n\to\infty} h^n \geq f^{-\frac{p_I}{p_G+p_I-1}}$$

Q.E.D.

陪審制で採用されている全会一致ルールの本来の趣旨は，冤罪の可能性を防ぐために採用されている。しかし，戦略性を考慮した上記の定理は「全会一致ルールを採用したとしても，冤罪の確率はゼロにはならない」ことを意味している。それどころか，メンバー数が増えれば増えるほど，冤罪の確率は増加することを示すことができる。Feddersen and Pesendorfer (1998) の極めて興味深い結果である。

これに対して Coughlan (2000) は，評決不能（ 全会一致ではない場合に再び裁判が開かれること）をモデルに導入し，他の閾値投票ルールの時よりも冤罪の確率を減少させる場合があることを示している。これに対し，Kojima and Takagi (2010)は評決不能を明示的に表し, Coughlan (2000)の結果が成立するのは極めて限られた状況（$p_G = p_I$）にすぎないと反論している。

4.3.2　一般的な閾値投票ルールの場合

では，$\bar{k} \neq k^*$かつ$n > \bar{k} > 0$の場合を考えよう。Gというシグナルを受け取っ

た場合の（Pivotal の）期待利得は

$$-\binom{n-1}{k-1}\Big[g(G\mid G)\gamma_G^{\bar{k}-1}(1-\gamma_G)^{n-\bar{k}}(1-\pi_G)\lambda_2(x) + g(I\mid G)\gamma_I^{\bar{k}-1}(1-\gamma_I)^{n-\bar{k}}\,\pi_G\lambda_1(x)\Big]$$

であり，Iというシグナルを受け取った場合は

$$-\binom{n-1}{k-1}\Big[g(G\mid I)\gamma_G^{\bar{k}-1}(1-\gamma_G)^{n-\bar{k}}\pi_I\lambda_2(x) + g(I\mid I)\gamma_I^{\bar{k}-1}(1-\gamma_I)^{n-\bar{k}}\,(1-\pi_I)\lambda_1(x)\Big]$$

である。

■対称混合戦略均衡の導出

まず，以下のことが成立する。

補題 2.

1. ***対称混合戦略均衡では, $\boldsymbol{1>\pi_G>0}$と$\boldsymbol{1>\pi_I>0}$が同時に成立することはない。***
2. ***もし，$\boldsymbol{1>\pi_I>0}$ であれば，$\boldsymbol{\pi_G=1}$ である。***
3. ***もし，$\boldsymbol{1>\pi_G>0}$ であれば，$\boldsymbol{\pi_I=1}$ である。***

[証明]

$1\geq\pi_G>0$である場合には,

$$\frac{g(G\mid G)\gamma_G^{\bar{k}-1}(1-\gamma_G)^{n-\bar{k}}}{g(I\mid G)\gamma_I^{\bar{k}-1}(1-\gamma_I)^{n-\bar{k}}}\geq\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \tag{6}$$

$1\geq\pi_I>0$である場合には

$$\frac{g(G\mid I)\gamma_G^{\bar{k}-1}(1-\gamma_G)^{n-\bar{k}}}{g(I\mid I)\gamma_I^{\bar{k}-1}(1-\gamma_I)^{n-\bar{k}}}\leq\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \tag{7}$$

がそれぞれ成立しなくてはいけない。

1.　$1>\pi_G>0$と$1>\pi_I>0$が同時に成立すると仮定し多とすると，(6) と(7)が同時に等号で成立していないといけない。しかし, それが成立するためには, $\frac{g(I|I)}{g(G|I)}=\frac{g(I|G)}{g(G|G)}$でなくてはいないが，一般的には成立していないため，矛盾している。

2.　*もし，*$1>\pi_I>0$ *であれば，*(7) が等号で成立する。(7) を変形して(6) の左辺に代入すると

$$\frac{g(G)p_G}{g(I)(1-p_I)}\left(\frac{g(I)p_I\lambda_1(x)}{g(G)(1-p_G)\lambda_2(x)}\right)=\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\frac{p_Ip_G}{(1-p_G)(1-p_G)}$$

となる。$p_G>\frac{1}{2}, p_I>\frac{1}{2}$より，$\frac{p_Ip_G}{(1-p_G)(1-p_G)}<1$がいえるので，(6) は厳密な不等号で成立する。

3. *もし，$1>\pi_G>0$ であれば，*(6) が等号で成立する。(6) を変形して(7) の左辺に代入すると

$$\frac{g(G)(1-p_G)}{g(I)p_I}\left(\frac{g(I)(1-p_I)\lambda_1(x)}{g(G)p_G\lambda_2(x)}\right)=\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\frac{(1-p_G)(1-p_G)}{p_Ip_G}$$

となる。$p_G>\frac{1}{2}, p_I>\frac{1}{2}$より，$\frac{p_Ip_G}{(1-p_G)(1-p_G)}<1$がいえるので，(7) は厳密な不等号で成立する。

Q.E.D.

補題より，全会一致ルールと異なり，Pivotal であることの情報量を低下させる方法は，2 つあることがわかる。1 つは，全会一致ルールの時と同様に，無罪のシグナルを受け取った時に一定確率で有罪に投票をする方法である($1>\pi_I>0$)。もう 1 つの方法は，有罪のシグナルを受け取った時に一定確率で無罪に投票する方法である（$1>\pi_G>0$)。

情報的投票行動が均衡になる条件は,

$$L(n,\bar{k})\geq\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\geq L(n,\bar{k}-1)$$

であったことを思い出してほしい。2 つの不等号の上限は「有罪のシグナルを受け取った時に有罪に投票する条件」，下限は「無罪のシグナルを受け取った時に無罪に投票する条件」であった。もし，少ない有罪票で有罪が決まる場合（$\bar{k}<k^*$），pivotal の状況における（有罪である）尤度比は小さいので（$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}>L(n,\bar{k})$），有罪のシグナルを受け取ったとしても無罪に投票する動機が生まれる。自身のシグナルに応じた投票を促すためには，有罪のシグナルを受け取った時に混合戦略を採用する（$1>\pi_G>0$)。逆に，より多くの有罪票が必要になる場合には（$\bar{k}>k^*$），pivotal であった場合の有罪の尤度が大きく（$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}<L(n,\bar{k}-1)$），無罪のシグナルを受け取ったとしても有罪に投票したくなる。結果，無罪のシグナルを受け取った時に混合戦略を採用するのである($1>\pi_I>0$)。

命題3. 仮定２，３が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$）としよう。さらに，$\boldsymbol{\bar{k} \neq k^*}$ かつ $\boldsymbol{n > \bar{k} > 0}$ が成立しているとする。以下の混合戦略均衡が存在する。

1. $\boldsymbol{L(n,n) > \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} > L(n,\bar{k})}$ *である時,*

$$\boldsymbol{\pi_G^{N1} = \frac{A_1 - 1}{A_1(1-p_I) - p_G}, \pi_I^{N1} = 1}$$

である。ここで, $\boldsymbol{A_1 = \left(\frac{g(I)(1-p_I)^{\bar{k}}\lambda_1(x)}{g(G)p_G^{\bar{k}}\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-\bar{k}}}}$ *である。*

2. $\boldsymbol{L(n,\bar{k}-1) > \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} > L(n,0)}$ *である時,*

$$\boldsymbol{\pi_G^{N2} = 1, \pi_I^{N2} = \frac{A_2 - 1}{A_2 p_I - (1-p_G)}}$$

である。ここで, $\boldsymbol{A_2 = \left(\frac{g(I)p_I^{n-(\bar{k}-1)}\lambda_1(x)}{g(G)(1-p_G)^{n-(\bar{k}-1)}\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}}$ *である。*

[証明]

1. $1 > \pi_G^{N1} > 0$であるので，(6) は等号で成立している。$\pi_I^{N1} = 1$を代入し，変形すると，

$$\frac{1-p_G\pi_G}{1-(1-p_I)\pi_G} = \left(\frac{g(I)(1-p_I)^{\bar{k}}\lambda_1(x)}{g(G)p_G^{\bar{k}}\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-\bar{k}}}$$

である。右辺は，A_1であるので，π_Gについて整理すると命題の式が求まる。また，

$$1 > \pi_G^{N1} > 0 \leftrightarrow L(n,n) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n,\bar{k})$$

となり，満たしていることがわかる。

2. $1 > \pi_I^{N2} > 0$であるので，(7) は等号で成立している。$\pi_G^{N2} = 1$を代入し，変形すると，

$$\frac{1-(1-p_G)\pi_G}{1-p_I\pi_G} = \left(\frac{g(I)p_I^{n-(\bar{k}-1)}\lambda_1(x)}{g(G)(1-p_G)^{n-(\bar{k}-1)}\lambda_2(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

である。右辺は，A_2であるので，π_Gについて整理すると命題の式が求まる。また，

$$1 > \pi_I^{N2} > 0 \leftrightarrow L\left(n, \bar{k} - 1\right) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n, 0)$$

となり，満たしていることがわかる。

Q.E.D.

パラメータに対して均衡が存在する範囲は，図のようになる。$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$が大きい場合には，有罪のシグナルを受け取った時に混合戦略を採用する（命題3 の1）。$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$が小さい場合には，無罪のシグナルを受け取った時に混合戦略を採用する（命題3 の2）。中間的な場合には，情報的投票を行う純粋戦略均衡が存在する。

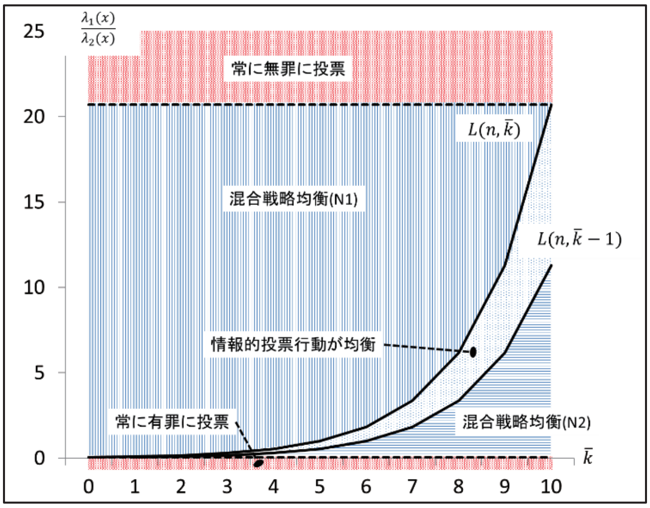

図　パラメータと均衡
（$\mathrm{n} = 10, \mathrm{p_G} = 0.55, p_I = 0.6, g(G) = 0.6, g(I) = 0.7$）

■会議人数$\boldsymbol{n}$に対する変化

では，$\boldsymbol{n}$が変化したときどのようになるだろうか。ここで，人数が増えても，有罪を下すために必要な比率は変化させないようにするために，$r = \frac{\bar{k}}{n}$を一定となるように，nに応じて$\bar{k}$が変化するとしよう。Feddersen and Pesendorfer (1998) にしたがって，$\mathrm{g(I)} = \mathrm{g(G)} = \frac{1}{2}, p_G = p_I = p, \lambda_1(x) = q, \lambda_2(x) = 1 - q$と特定化する。

定理 5. 仮定２，３ が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$\boldsymbol{x_1 = \cdots = x_n}$）としよう。さらに，$\boldsymbol{\bar{k} \neq k^*}$ かつ $\boldsymbol{n > \bar{k} > 0}$ が成立し，$\boldsymbol{g(I) = g(G) = \frac{1}{2}, p_G = p_I = p, \lambda_1(x) = q, \lambda_2(x) = 1 - q}$ であるとする。閾値投票ルールが $\boldsymbol{r}$ で与えられているとき，以下のことが成立する。

1. ***混合戦略均衡の収束先について***

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \pi_G^{N1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{r}{1-r}} - 1}{(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{r}{1-r}} - p}, \lim_{n\to\infty} \pi_G^{N2} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1-r}{r}} - 1}{p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1-r}{r}} - (1-p)}}$$

2. ***CJT は成立する。***

[証明]

1. 特定化の仮定より，

$$A_1 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{rn}{(1-r)n}} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{\frac{1}{(1-r)n}}, A_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{n-(rn-1)}{rn-1}} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{\frac{1}{rn-1}},$$

である。よって，$\lim_{n\to\infty} A_1 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{r}{1-r}}$ である。よって，代入すると，

$$\lim_{n\to\infty} \pi_G^{N1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{r}{1-r}} - 1}{(1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{r}{1-r}} - p}$$

なお，$1 \geq \pi_G > 0$ であるためには，$\frac{1}{2} \geq r > 0$ が成立する必要がある。また，

$$\lim_{n\to\infty} A_2 = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{n-(rn-1)}{rn-1}}\right]\left[\lim_{n\to\infty} \left(\frac{q}{1-q}\right)^{\frac{1}{rn-1}}\right] = \left(\frac{1}{1-p}\right)^{\frac{1-r}{r}}$$

である。よって，

$$\lim_{n\to\infty} \pi_G^{N2} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1-r}{r}} - 1}{p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1-r}{r}} - (1-p)}$$

なお，$1 \geq \pi_I > 0$であるためには，$1 > r \geq \frac{1}{2}$が成立する必要がある。

2. ここでは，すべての混合戦略均衡について

$$\gamma_G > r > \gamma_I$$

が成立することを示す。もし，このことが成立すると，CJT は成立することになる。なぜなら

- 真の状態が有罪の時の有罪への投票確率γ_Gを，真の状態が有罪の時の有罪シグナルの出現確率に新たに定義しなおす,
- 真の状態が無罪の時の無罪への投票確率γ_Iを，真の状態が無罪の時の無罪シグナルの出現確率に新たに定義しなおす,

とすると，上記の不等式は仮定 4 に対応し，定理 2 の証明をそのまま適用することができるからである。

すべての均衡について$\gamma_G > \gamma_I$が成立することは明らかであるので，rが不等式満たさないことを仮定し，背理法で証明しよう。仮に，$\gamma_G > \gamma_I \geq r$であるとしよう。$1 \geq \pi_G > 0$が実現しているとすると，

$$\frac{g(\,G \mid G\,)\gamma_G^{rn-1}(n)(1-\gamma_G(n))^{n-rn}}{g(\,I \mid G\,)\gamma_I^{rn-1}(n)(1-\gamma_I(n))^{n-rn}} \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$$

が成立している。ここで，$\gamma_G(n), \gamma_I(n)$は，nを固定したときの混合戦略均衡によって実現する有罪の投票確率である（下付きは受け取ったシグナルを表す）。さらに，特定化の仮定から不等式は

$$\frac{1}{f+1} \geq q \tag{8}$$

となる。ここで，$f = \frac{1-p}{p}\left(\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}}\right)^n \left(\frac{\gamma_G(n)}{\gamma_I(n)}\right)^{-1}$である。$f$の収束先は

$$\lim_{n\to\infty} f = \frac{1-p}{p}\left(\frac{\gamma_G(n)}{\gamma_I(n)}\right)^{-1}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}}\right)^n\right]$$

である。

$\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}} > 1$であることを示す。$x^r(1-x)^{1-r}$は,

$$\frac{d(x^r(1-x)^{1-r})}{dx} = x^{r-1}(1-x)^{-r}(r-x)$$

であるので，$x \geq r$のとき，単調減少関数になる。$\gamma_G > \gamma_I \geq r$より，

$\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}} > 1$となる。

$\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}} > 1$より，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\gamma_G^r(n)\left(1-\gamma_G(n)\right)^{1-r}}{\gamma_I^r(n)\left(1-\gamma_I(n)\right)^{1-r}}\right)^n = \infty$となり，$\lim_{n\to\infty} f = \infty$である。よって，(8) の左辺は0 に収束していく。したがって，十分大きなnについて(8) は満たされておらず，矛盾している。

$r \geq \gamma_G > \gamma_I$も同様に示すことができる。

Q.E.D.

4.4 非対称純粋戦略均衡

$\bar{k} \neq k^*$だった時に，情報的投票行動が均衡にならない理由は，自身の情報よりも Pivotal であることの情報（ 他のすべての投票者の情報を集約したもの）が価値があるためであった。とすると，一部の人々が情報に基づいた投票をしないことで，他の投票者の情報の価値を引き下げたとしたら，各投票者が自身の情報に基づいて投票する動機を生み出せる可能性がある。実際, Persico (2004) によると次のような非対称純粋戦略均衡も存在する。

命題 4. 仮定２，３ が成立し，判断を誤ったときの費用が投票者間で全く同じである（$x_1 = \cdots = x_n$）としよう。さらに，$\bar{k} \neq k^*$かつ$n > \bar{k} > 0$が成立しているとしよう。この時，以下の戦略は均衡になる。

1. ***$L(n,n) > \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} > L(n,\bar{k})$ である時, $\mathrm{n}_1 \leq n$がシグナルによらず無罪に投票し，$n - n_1$人が情報的投票行動をとる。***
2. ***$L\left(n,\bar{k}-1\right) > \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} > L(n,0)$ である時, $\mathrm{n}_1 \leq n$がシグナルによらず有罪に投票し，$n - n_1$人が情報的投票行動をとる。***

[証明]

まず，$L(n-\tilde{n},\bar{k}-\tilde{n})$が$\bar{k} > \tilde{n} > 0$に対して単調減少関数であることを示す。
$L(n-\tilde{n},\bar{k}-\tilde{n})$の自然対数をとると，

$$\left(\bar{k}-\tilde{n}\right)\ln p_G - \left(\bar{k}-\tilde{n}\right)\ln(1-p_I) + \ln\frac{g(G)(1-p_G)^{n-\bar{k}}}{g(I)p_I^{n-\bar{k}}}$$
$$= \left(\bar{k}-\tilde{n}\right)(\ln p_G - \ln(1-p_I)) + \ln\frac{g(G)(1-p_G)^{n-\bar{k}}}{g(I)p_I^{n-\bar{k}}}$$

$p_G > (1-p_I)$より，$\tilde{n}$に対して単調減少関数であることがわかる。

「2.」も同様の方法で示すことができるので，ここでは，「1.」を示そう。n_1を次の式を満たすように設定する。

$$L\left(n-n_1,\bar{k}\right) \geq \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L\left(n-n_1,\bar{k}-1\right)$$

なお，$L\left(n,\bar{k}\right)$はnに対して単調減少関数であるので上記を満たすn_1は必ず存在する。さらに，n_1の定義から$n-n_1$人が情報的投票行動をとっていることがわかる。そこで，ここではn_1人がシグナルによらず無罪に投票するかどうかを確認する。

Pivotal の時の期待利得は次のようになる。

$$-\binom{n-n_1}{\bar{k}-1}\Big[g\left(G \mid \sigma^i\right)(1-p_G)^{n-n_1-(\bar{k}-1)}p_G^{\bar{k}-1}\left(1-\pi^i\left(G \mid \sigma^i\right)\right)\lambda_2(x)$$

$$+g\left(I \mid \sigma^i\right)p_I^{n-n_1-(\bar{k}-1)}(1-p_I)^{\bar{k}-1}\pi^i\left(G \mid \sigma^i\right)\lambda_1(x)\Big]$$

よって，Gというシグナルを受け取るのとき，無罪に投票する条件は

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n-n_1+1,\bar{k})$$

Iというシグナルを受け取るのとき，無罪に投票する条件は

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n-n_1+2,\bar{k})$$

である。$L(n-\tilde{n},\bar{k}-\tilde{n})$は$\tilde{n}$に対して単調減少関数なので二つの式をまとめると，

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n-n_1+2,\bar{k})$$

である。(i) 命題の前提から$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} \geq L(n-n_1,\bar{k}-1)$が成立してること，(ii) $L\left(n,\bar{k}\right)$はnに対して単調減少関数なので$L\left(n-n_1,\bar{k}-1\right) > L(n-n_1+2,\bar{k}-1)$が成立していること，の二つの点からこの不等式は成立することがわかる。

Q.E.D.

4.5 まとめ

ここまで，プレーヤーの戦略性を考慮したうえで，どのような均衡が存在するか。そして，その均衡で CJT が成立するかどうかを検討してきた。わかったことは以下の点である。

1. 情報的投票行動が均衡戦略になるためには，閾値投票ルールが最適でな

けれぱならない（$\bar{k} = k^*$）。

2. もし，閾値投票ルールが最適ではない場合，対称混合戦略均衡が存在する。
3. 会議の人数が増加した極限では，全会一致ルールのもとでは CJT は成立しないが，その他の状況では CJT は成立する。

要するに，情報的投票が均衡になるとは限らないものの，戦略性を考慮していない古典的な結果は，戦略性を考慮したとしても頑健であることがわかった。結果，前節と同様に会議のサイズは大きければ大きいほど望ましいという問題も依然として残り続けているのである。

次節では，「(ii) 追加的費用なしに会議のメンバーは情報を獲得できる」という点に注目して議論をしよう。

（続）

参考文献

Austen-Smith, David and Jeffrey S. Banks (1996) “Information Aggregation, Rationality, and the Condorcet Jury Theorem,” *American Political Science Review*, Vol.　90, No. 1, pp. 34-45.

Coughlan, Peter J. (2000) “Defense of Unanimous Jury Verdicts: Mistrials, Communication, and Strategic Voting,” *American Political Science Review*, Vol. 94,　No. 2, pp. 375-393.

Feddersen, Timothy and Wolfgang Pesendorfer (1998) “Convicting the Innocent: The Inferiority of Unanimous Jury Verdicts under Strategic Voting,” *American Political Science Review*, Vol. 92, No. 1, pp. 23-35.

Kojima, Fuhito and Yuki Takagi (2010) “A theory of hung juries and informative voting,” *Games and Economic Behavior*, Vol. 69, No. 2, p. 498-502.

Persico, Nicola (2004) “Committee Design with Endogenous Information,” *Review of Economic Studies*, Vol. 71, No. 1, pp. 165-191.

森谷文利 (2011)「会議の経済理論(1)」,『神戸外大論叢』, 第62巻, 第5号, 11-30頁.

Keywords:　組織の経済学　政治経済学　投票理論