

神戸市外国語大学 学術情報リポジトリ

On the Stability of Stellar System Consisting of Periodically Orbiting Stars.

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 1988-09-30 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 佐藤, 通, Sato, Toru メールアドレス: 所属:
URL	https://kobe-cufs.repo.nii.ac.jp/records/2239

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



周期的軌道からなる星系の安定性

佐藤 通

§1. Introduction

宇宙を構成する諸スケールの星系（星団，銀河，銀河集団，……）の進化は相互の遭遇（主として distant encounter）における散乱の非弾性度に大きく左右される。星系を平衡点の近傍に多数の固有振動数 ω_i ($i=1, 2, \dots$) を持つ安定振動系と見なすと，外力（つまり遭遇する相手の作る潮汐力） $f(t)$ の Fourier 成分 $f(\omega_i)$ の $\sum_i |f(\omega_i)|^2$ が星系の内部エネルギー励起量 ΔE を定める。これが線型近似の範囲で非弾性度のスタンダードな評価であった。⁽¹⁾ この問題は力学的平衡状態（以降，0 次の状態と呼ぶ）にある星系の安定性の問題と表裏をなす。後者の理論的解析は，主としてマクロ，ミクロの2つの典型的的手法によってなされてきた。マクロなアプローチは virial 方程式に基づき，⁽²⁾ ミクロなそれは無衝突ボルツマン方程式に基づく。⁽³⁾ その際0次の系の状態は，前者では全系の慣性モーメント，重力エネルギー，運動エネルギー等によって，後者では6次元 phase space（いわゆる μ -空間）での一体分布関数 $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ によって表現される。これらから0次の系を構成する星の軌道に関する情報を得るためには，前者では総和されてしまって不可能であり，後者は implicit に含んでいるのだがあらためて積分しなければなら

(1) 拙稿“潮汐力による天体の内部自由度励起の諸問題”，「神戸大論叢」第34巻5号1頁（1983年）。

(2) S. Chandrasekhar, “Ellipsoidal Figures of Equilibrium” (1969), Yale University Press, が古典的著作。また多体問題における系の慣性モーメント (Jacobi function) の広い応用例を述べた V.I. Ferronsky, et al. “Jacobi Dynamics” (1987), D. Reidel Publishing Company, がある。

(3) A.M. Fridman and V.L. Polyachenko, “Physics of Gravitating Systems” Vols. I, II (1984), Springer-Verlag, に豊富な諸例が紹介されている。

ない。

ここで原子物理学において我々が慣れ親しんだ考え、つまり原子内電子の各軌道は、保存量を示すパラメータである量子数によって指定され、エネルギー $4E$ の吸収や放出はある軌道から他の軌道への遷位⁽⁴⁾として理解されるという描像を(不連続量という本質的相違があるにせよ)星系の記述に転用できないであろうか。星系を、ある保存量で指定されるいくつかの基本的な軌道(族)の集まりとして表わす、という着想である。それが可能なら、星系の0次の内部構造に関する上記のマクロとミクロの表現を有効に内挿する“等身大”の記述法が得られる。

Schwarzschild⁽⁵⁾ は, triaxial (3軸非等)な銀河モデルを作るにあたって初めてこの記述法を考案した。その基礎にあるのは、与えられたポテンシャル分布(従って密度分布)の中を走って或る空間領域を埋め尽くす、3つの保存量⁽⁶⁾を担った“regular orbit”という概念である。後者は、軸上の直線軌道や軸のまわりの円軌道のような周期的軌道をそれぞれ“parent”として、そのまわりをとり囲む“family”をなし、box形(box orbit)やtube形(tube orbit)の空間領域を占める⁽⁷⁾。Schwarzschild は3つの保存量をパラメータとするこれらの regular orbits を重ね合わせて元の密度分布を再現する、という仕方で self-consistent な銀河モデルを作り上げた⁽⁸⁾。この重ね

(4) 単なるアナロジーとして星系のふるまいを量子論的に表現することは珍しいことではない。たとえば Y. Fujishima, M. Fujimoto and M. Tosa, Publ. Astron. Soc. Jap. (1985) 37, 415. また Saslaw は星の集まりの媒質の中を大質量星が通過した時生じる集団励起を“grexons”と命名している。W.C. Saslaw, “Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems” (1985), Cambridge University Press.

(5) M. Schwarzschild, Astrophys. J. (1979) 232, 236. また彼による解説記事が ed. by I. Fall and D. Lynden-Bell “The Structure and Evolution of Normal Galaxies” (1981), Cambridge University Press, p. 43, にある。

(6) 1つは classical (エネルギー) 2つは non-classical なもの。後者の存在はポアンカレの考案に始まる“surface of section”の方法により数値計算的に確かめられる。3つ存在することが彼の議論に必須の要件である。

(7) J. Binney and S. Tremaine, “Galactic Dynamics” (1987), Princeton University Press, の Chapter 3 に詳述されている。

(8) この方法で作るモデルの uniqueness と安定性の問題は十分には調べられていない。後者に関しては§3でふれる。

合わせはその最適の係数を線型計画法で定める問題に他ならない。

その後これに関して次のような展開がなされたことを付記しておく。(i) この方法が軸対称や球対称のモデルにも適用された。(ii) Schwarzschild の方法と galactic dynamics の式との橋わたしがなされた。(iii) Binney らによって, regular orbit を指定するパラメータとして “action integral” $J_i (i=1, 2, 3)$ の方が有益であることが指摘された。何故なら J_i は同じ family の中では連続量で, 異なる family 間では不連続な飛びを持つこと, およびポテンシャルのゆっくりした変化に際して断熱不変量としてふるまう等から。(iv) 何故銀河のポテンシャルは (必要な個数の保存量を持つ) regular orbits の存在を許すようなポテンシャルになっているか, に Gerhard は次のように答えた。それは, 可積分ポテンシャルとして知られている Stäckel ポテンシャルで近似できるからであり, 後者とのズレは2つの軌道 family 間の境界に薄い stochastic layer を形成するにすぎないからである。

星系の0次状態の, 上の意味での内部構造——各種周期的軌道とそれらに随伴する軌道 families の集まりとして表現される——をストレートに反映するような形で, 星系の安定性問題を定式化することは興味深い課題である。その準備段階にあたる本稿は安定性問題の基礎方程式として§3で具体形を導くように, 次の線型発展方程式

$$\frac{d}{dt}\xi + Q(t)\xi = 0$$

をとる。ここで $\xi(t)$, $Q(t)$ は $6N$ 次元相空間 (いわゆる Γ -空間) でのベクトルと正方行列で, 前者はゆらぎを示し, 後者の中には0次のすべての軌道のふるまいが (与えられたものとして) 含まれている。最も単純なケースか

(9) 前者は D.O. Richstone, *Astrophys. J.* (1984), 281, 100/J.L. Bishop, *Astrophys. J.* (1986), 305, 14. 後者は D.O. Richstone and S. Tremaine, *Astrophys. J.* (1984), 286, 27.

(10) P.O. Vandervoort, *Astrophys. J.* (1984), 287, 475.

(11) J. Binney and D. Spergel, *Mon. Not. R. astr. Soc.* (1984), 206, 159.

(12) 金属内自由電子のエネルギーのバンド構造が連想される。

(13) O.E. Gerhard, *Astron. and Astrophys.* (1985), 151, 279.

ら始めるといふ定石に従って、本稿で具体的計算のサンプルとしてとり上げるのは行列 $Q(t)$ 全体が単一周期を持つ関数となる星系モデル（一様密度球）である。これは Hill の方程式の多次元版に他ならず、その解の不安定性はパラメータ共鳴によるものである。

以下の構成は次のようになる。§2 で Hill の方程式の解（フロケーの定理）とその安定性の判別を多次元の場合に拡張する。§3 で星系の安定性問題に関する定式化を行ない、関連事項の考察をする。§4 で以上を一様密度球モデルに適用した計算を報告し、結果を吟味する。最後に §5 で次のステップへの展望を簡単に付記する。なお Appendix (A)(B)(C) に本文で省略した計算の骨子を記しておく。

§2 多次元の Hill's Equation の解の安定性

係数 $k(\tau)$ が周期(= π とする)的变化をする次の形の線型二階微分方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2}y + \lambda y + k(\tau)y = 0; \quad k(\tau + \pi) = k(\tau) \quad (1)$$

をヒル (Hill) の方程式と総称する (λ は定数)。⁽¹⁴⁾ プランコの共振や金属自由電子のエネルギー・バンドの初等理論でおなじみの、マシュエ (Mathieu) 方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2}y + (a - 2q \cos 2\tau)y = 0 \quad (2)$$

はその一例である (a, q は定数で $q > 0$ としてよい)。 τ は無次元化された時間で $\tau = \omega_0 t$, よってもとの時間 t に関し $k(t)$ の角振動数は $2\omega_0$ であることに注意しておく。

N 個の粒子からなる系の3次元配置空間での $3N$ 次元位置ベクトル(縦ベクトル)を $\tilde{x}(\tau)$ とする。以降で $M = 3N$ (空間自由度)とおく。 $K(\tau)$ を周期 π を

(14) W. Magnus and S. Winkler, "Hill's Equation" (1979), Dover Publications Inc., が概容を知るのによい。他に例えば、伏見康治「現代物理学を学ぶための古典力学」(岩波書店), 戸田盛和「振動論」(培風館)など。

持つ M 次正方行列として、 $\tilde{x}(\tau)$ は次の運動方程式 (M 次元の Hill's Equation)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{x} + \nu^2 \tilde{x} + K(\tau) \tilde{x} = 0; \quad K(\tau + \pi) = K(\tau) \quad (3)$$

に従うものとする。ここで ν はスカラー定数⁽¹⁵⁾。

次で定義される $2M$ 次元縦ベクトル $\xi(\tau)$ と $2M$ 次正方行列 $Q(\tau)$ を導入する (\tilde{x} の上のドットは $d/d\tau$) :

$$\xi(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{x}(\tau) \\ \dot{\tilde{x}}(\tau) \end{pmatrix}, \quad Q(\tau) \equiv \begin{pmatrix} O & -J \\ \nu^2 J + K(\tau) & O \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ここで O, J はそれぞれ M 次の正方零行列と単位行列。式(3)は次の一階微分方程式

$$\frac{d}{d\tau} \xi + Q(\tau) \xi = 0; \quad Q(\tau + \pi) = Q(\tau) \quad (5)$$

の形になる。この $\xi(\tau)$ の初期値を $\xi_0 \equiv \xi(0)$ とする。式(5)は $2M$ 次元相空間 (Γ -空間) の点 ξ_0 を始点とした連続的な曲線を作り出す。 τ の進行とともにこの曲線が点 ξ_0 の近くの或る閉曲線に沿って回り続ける (周期解) か、近くにとどまりつつも或る次元の超曲面を埋め尽すように動きまわる (非周期的安定解) か、又は点 ξ_0 からの距離 $|\xi(\tau) - \xi_0|$ が τ に関し指数関数的スピードで増大する (不安定成長解) か、等々を定める諸要因は、フリーパラメータも込みで既知の周期的行列 $Q(\tau)$ の中にすべて含まれている。

式(5)の $2M$ 個の線型独立な解 $\xi^{(1)}(\tau), \xi^{(2)}(\tau), \dots, \xi^{(2M)}(\tau)$ から作った $2M$ 次正方行列 $X(\tau)$ を

$$X(\tau) \equiv (\xi^{(1)}(\tau), \xi^{(2)}(\tau), \dots, \xi^{(2M)}(\tau))$$

とおくと、各 $\xi^{(i)}(\tau)$ が式(5)をみたすから $X(\tau)$ も

$$-\frac{d}{d\tau} X(\tau) + Q(\tau) X(\tau) = 0 \quad (6)$$

をみたす。また各 $\xi^{(i)}(0)$ をその第 j 成分が $\xi_j^{(i)}(0) = \delta_{ij}$ であるような単位ベ

(15) A を任意の (M 次正方) 定数行列として式(3)の第二項を $A\tilde{x}$ としておく方がより一般的。式(3)は $A = \nu^2 \times$ 単位行列という特別の場合にあたる。この一般化は容易であるが本稿の議論にはこれで間に合う。

クトルにとっておくと、 $X(0)=I$ 。ここで I は $2M$ 次単位行列。この $X(\tau)$ を基本解行列という。 $X(\tau)$ の行列式 (ロンスキアン) は式(6)から

$$\det X(\tau) = \det X(0) \cdot \exp \left[-\int_0^\tau \text{tr} Q(\tau') d\tau' \right]$$

となることが容易に示せる。対角和 $\text{tr} Q(\tau)=0$ だから、任意の τ に対し

$$\det X(\tau) = 1 \tag{7}$$

これはもとの方程式(3)が散逸項を含まないことの表現である。⁽¹⁶⁾ $X(\tau)$ を使って式(5)の解は

$$\xi(\tau) = X(\tau)\xi_0 \tag{8}$$

と表わされる。なおこれは $X(\tau)$ が Γ -空間の点 ξ_0 から点 $\xi(\tau)$ への (パラメータ τ に関して連続な) 写像であることを表わしている。系が散逸的でないとき、この写像はシンプレクティック (symplectic) な写像であることが示せる。⁽¹⁷⁾

次に解(8)の安定性の議論のためにまずフロケール (Floquet) の定理を多次元に拡張しておく。 $Q(\tau)$ の周期性 $Q(\tau+\pi)=Q(\tau)$ から $X(\tau+\pi)$ も式(6)の解だから、 A を $2M$ 次正方定数行列として $X(\tau)$ と $X(\tau+\pi)$ は

$$X(\tau+\pi) = X(\tau) A \tag{9}$$

の関係で結ばれる。⁽¹⁸⁾ 式(7)から

$$\det A = 1 \tag{10}$$

式(9)と(10)はそれぞれ $Q(\tau)$ の周期性と系が散逸的でないことの表現である。この定数行列 A の中に解(8)の安定性に関する情報がすべて収納されている。以下では A の固有値が重根を持たないとして話を進める。 A の固有方程式

(16) 式(3)が $d^2\bar{x}/d\tau^2 + R(\tau)d\bar{x}/d\tau + \nu^2\bar{x} + K(\tau)\bar{x} = 0$ の形するとき $Q(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ \nu^2 J + K(\tau) & R(\tau) \end{pmatrix}$ となり $\text{tr} Q(\tau) = \text{tr} R(\tau)$ 。ふつうの場合、まさつ力の性質からこれは正だから $\det X(\tau)$ は τ の減小関数となる。

(17) “symplectic” の意味は、アーノルド・アベズ「古典力学のエルゴード問題」(吉岡書店) 参照。

(18) $\xi^{(1)}(\tau)$, $\xi^{(2)}(\tau)$, ..., $\xi^{(2M)}(\tau)$ が式(5)の線型独立な解なら $\xi^{(1)}(\tau+\pi)$, $\xi^{(2)}(\tau+\pi)$, ..., $\xi^{(2M)}(\tau+\pi)$ も同様。よって各 $\xi^{(i)}(\tau+\pi)$ は前者の一次結合で表わされる。その係数の行列が A 。 A が $X(\tau)$ の後にかかるのは式(6)の形からも明らか。

$$\det(A - \rho I) = 0 \quad (11)$$

の根を $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2M}$ とすると、周知の関係から

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{2M} = \det A = 1, \quad (12a)$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{2M} = \text{tr} A. \quad (12b)$$

定数 η_i を $\rho_i = e^{\pi i \eta_i}$ で定義すると Appendix(A) で導くように多次元の Floquet の定理は次のように表わされる：

「式(5)の解は一般に次の形に書ける、

$$\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{2M} e^{\eta_i \tau} q^{(i)}(\tau); \quad q^{(i)}(\tau + \pi) = q^{(i)}(\tau), \quad \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{2M} = 0 \quad (20)$$

ここで各 $q^{(i)}(\tau)$ は周期 π の任意関数で $2M$ 次元縦ベクトルである。 $M=1$ のとき、 (A が重根を持たない場合) よく知られた形に帰着する。

従って、解が安定であること (又は不安定成長すること) の必要十分条件は、 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2M}$ の実数部分がすべてゼロであること (又は少くとも1つ正であること) である。 $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{2M} = 0$ から、それらの中に負があれば必ず正があるからである。相加平均 \geq 相乗平均の関係と式(12a) とから $|\rho_1| + |\rho_2| + \cdots + |\rho_{2M}| \geq 2M$ で、この等号は安定 ($|\rho_1| = |\rho_2| = \cdots = |\rho_{2M}| = 1$) の場合のみだから不安定性の必要十分条件は

$$|\rho_1| + |\rho_2| + \cdots + |\rho_{2M}| > 2M.$$

この左辺は $|\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{2M}| (= |\text{tr} A|)$ よりも大きいから、不安定性の十分条件は

$$|\text{tr} A| > 2M \quad (13)$$

となる。なお $M=1$ のとき式(13)は必要十分条件になることを注意しておく。

何故ならこのとき固有方程式 (11) は $\rho^2 - \text{tr} A \cdot \rho + 1 = 0$ となるからである。

$M=1$ の場合の名称にならって、この不安定性を「パラメータ共鳴」と呼ぶ

(19) 式(9)で $\tau=0$ とおくと $A=X(\tau)$ だから A もミンプレクティクな写像。このとき A の固有値は更に次の性質を持つ：「 ρ が固有値なら $1/\rho, \rho^*, 1/\rho^*$ もまた固有値」(Poincaré-Lyapounov), 従って「固有値の全体は $|\rho|=1$ の対 ρ, ρ^* と、 $|\rho| \neq 1$ の四重対 $\rho, 1/\rho, \rho^*, 1/\rho^*$ の2種類の組に分かれる」。アノルド・アベズ著、前掲書、付録29参照。

(20) 両辺の $2M$ 次元ベクトルの上半分を切り離して $\mathfrak{F}(\tau) = \sum_{i=1}^{2M} e^{\eta_i \tau} \tilde{p}^{(i)}(\tau); \tilde{p}^{(i)}(\tau + \pi) = \tilde{p}^{(i)}(\tau)$, と書いてもよい。 $\tilde{p}^{(i)}(\tau)$ は M 次元縦ベクトル。

ことにする。

以降では十分条件(13)で満足することにして、まず $\text{tr} A$ の表式を求めてみる。これは式(3)の ν と $K(\tau)$ から得られる量である。導出の要点は Appendix(B) に述べることにし結果のみを記す。 $\text{tr} A \equiv \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$ の逐次展開の形で書くと各 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = 2M \cdot \cos \nu\pi \\ \gamma_1 = -\frac{1}{\nu} \sin \nu\pi \cdot \int_0^\pi d\tau \cdot \text{tr} K(\tau) \\ \gamma_k = \left(-\frac{1}{\nu}\right)^k \int_0^\pi d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \phi^{(k)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \\ \quad \times \text{tr} \{K(\tau_1)K(\tau_2)\cdots K(\tau_k)\}, (k \geq 2) \\ \phi^{(k)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \\ \equiv \sin \nu(\tau_1 - \tau_2) \cdot \sin \nu(\tau_2 - \tau_3) \cdots \sin \nu(\tau_{k-1} - \tau_k) \cdot \sin \nu(\tau_k - \tau_1 + \pi) \end{array} \right. \quad (14) \quad (21)$$

$K(\tau)$ の周期性を利用して次の形に直してもよい。 $K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot e^{-i2n\tau}$ とおく。ここで

$$P_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K(\tau) e^{i2n\tau} d\tau, \quad P_{-n} = P_n^* \quad (15)$$

は $K(\tau)$ の Fourier 係数で M 次正方行列 (上の 2 つめの式は $K(\tau)$ が実数行列であることから)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = 2M \cdot \cos \nu\pi \\ \gamma_1 = -\frac{\pi}{\nu} \sin \nu\pi \cdot \text{tr} P_0 \\ \gamma_k = \left(\frac{i}{2\nu}\right)^k \sum_{\epsilon} \sum_n \epsilon_1 \epsilon_2 \cdots \epsilon_k \cdot e^{i\epsilon_k \nu\pi} \cdot \text{tr} \{P_{n_1} P_{n_2} \cdots P_{n_k}\} \\ \quad \times \int_0^\pi d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \exp(i\Psi^{(k)}), (k \geq 2) \\ \Psi^{(k)} \equiv [\nu(\epsilon_1 - \epsilon_k) - 2n_1] \tau_1 + [\nu(\epsilon_2 - \epsilon_1) - 2n_2] \tau_2 \\ \quad + [\nu(\epsilon_3 - \epsilon_2) - 2n_3] \tau_3 + \cdots + [\nu(\epsilon_k - \epsilon_{k-1}) - 2n_k] \tau_k \end{array} \right. \quad (16)$$

(21) $\nu=0$ のときは $\nu \rightarrow 0$ の極限をとればよい。式(16)も同じ。

ここで \sum_{ϵ} は $\sum_{\epsilon_1=\pm 1} \sum_{\epsilon_2=\pm 1} \dots \sum_{\epsilon_k=\pm 1}$ の、 \sum_n は $\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty}$ のそれぞれ略記である。

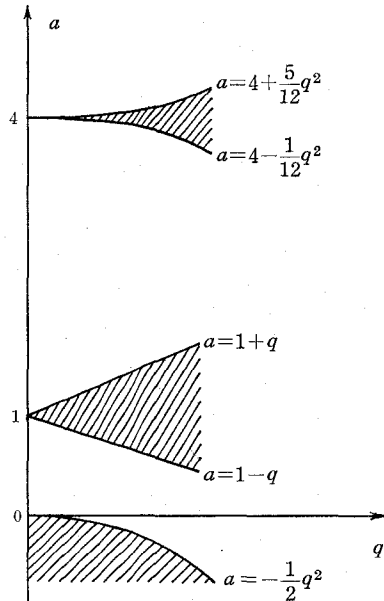
不安定性 (パラメータ共鳴) の十分条件は式(13)から

$$|2M \cos \nu\pi + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots| > 2M \quad (17)$$

となる。 $K(\tau)$ が関与するのは $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ を通じてであるが、行列 $K(\tau)$ の各成分の大きさの目安を ϵ とするとせいぜい $\gamma_1 \sim 2M\epsilon, \gamma_2 \sim (2M\epsilon)^2, \dots$ の order である。従って上式を満たすためには、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $\cos \nu\pi \approx \pm 1$ つまり $\nu \approx 0, 1, 2, \dots$ でなければならず、これからハズレた ν に対してはそのズレの程度に応じて ϵ が大きくならなければならない。パラメータ共鳴の発振条件の定性的特徴がよく現われている。なお $K \equiv 0$ ($\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$) のとき上式をみたくのは $\nu = \text{純虚数}$ ($\nu^2 < 0$) の場合だが、これは式(3)から当然である。

最後にテスト・ケースとして $M=1$

(一次元) にあたる Mathieu 方程式 (2) の解の不安定性を、上の式(17)——この場合必要十分条件である——でチェックしてみよう。他の著作をもとに右図に Mathieu 方程式の解の不安定領域 (図の斜線部分、なお境界の曲線上で解は π または 2π の周期関数になる) を $a \approx 0 \sim 4, q \ll 1$ の範囲で示してある。式(2)は(3)の $\nu^2 = a, K(\tau) = -2q \cos 2\tau$ (スカラー関数) にあたり、これを式(14)に入れて γ_4 まで求めると ($a = \nu^2$ とおいて)



(22) γ_1 は $K(\tau)$ の一周期平均しても消えない部分 ($=P^{(0)}$) に由来する。 $K(\tau)$ からこの部分を分離して式(3)の第二項に入れておくと注(15)で述べたことにあたる ($A = \nu^2 J + P^{(0)}$)。なお §4 の末尾参照。

(23) 注(14)の伏見 (図59) 又は戸田 (図2・10) を参照。

$$\gamma_1=0, \quad \gamma_2=\frac{\pi}{2} \frac{\sin \nu\pi}{\nu(\nu^2-1)} q^2, \quad \gamma_3=0,$$

$$\gamma_4=\left[-\frac{\pi^2}{16} \frac{\cos \nu\pi}{\nu^2(\nu^2-1)^2} + \frac{\pi}{32} \frac{15\nu^4-35\nu^2+8}{\nu^3(\nu^2-1)^3(\nu^2-4)} \sin \nu\pi\right] q^4.$$

$q \ll 1$ だから $\gamma \cong 2 \cos \nu\pi + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ とおいて不安定条件(17)を $|\gamma| > 2$ とする。これは $\nu \rightarrow 0, 1, 2, \dots$ ($a \rightarrow 0, 1, 4, \dots$) のとき満たされるから個別にそれぞれの近くを調べる。

$$1) \quad \nu \rightarrow 0 (a \rightarrow 0) \text{ のとき } \gamma \cong 2 \left[1 - \frac{\pi^2}{2} \left(a + \frac{1}{2} q^2 \right) + O(q^4) \right]$$

よって $a < -\frac{1}{2} q^2$ で不安定

$$2) \quad \nu \rightarrow 1 (a \rightarrow 1) \text{ のとき } \gamma \cong -2 \left[1 - \frac{\pi^2}{8} \{ (a-1)^2 - q^2 \} + O(q^4) \right]$$

よって $1-q < a < 1+q$ で不安定

$$3) \quad \nu \rightarrow 2 (a \rightarrow 4) \text{ のとき } \gamma \cong 2 \left[1 - \frac{\pi^2}{16} \left\{ (a-4) + \frac{1}{12} q^2 \right\} \right.$$

$$\left. \times \left\{ (a-4) - \frac{5}{12} q^2 \right\} + O(q^6) \right]$$

よって $4 - \frac{1}{12} q^2 < a < 4 + \frac{5}{12} q^2$ で不安定

図に示した不安定領域をちょうど再現していることがわかる。

§3 星系の安定性問題

§1に述べたような定式化，すなわち星系の0次（平衡状態）の全軌道運動がストレートに反映されるように安定性問題の基礎方程式を作るには，Newtonの運動方程式を裸のまま扱うだけで事たりる。

星系を万有引力のみで作用しあっている，質量 m の N 個の粒子（質点）系とする。 R を系の大きさの目安（球状のときは半径）として $\omega_0^2 \equiv GNm/R^3$ ， $\tau = \omega_0 t$ とおく。 α 番目の粒子の位置ベクトル $\vec{X}_\alpha(\tau)$ が摂動によって $\vec{X}_\alpha(\tau) + \vec{x}_\alpha(\tau)$ になったとすると， $\vec{X}_\alpha(\tau)$ と $\vec{x}_\alpha(\tau)$ の従う方程式はそれぞれ（後者は線型化近似）

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \vec{X}_\alpha - \frac{Gm}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial \vec{X}_\alpha} \sum_{\beta} \frac{1}{|\vec{X}_\alpha - \vec{X}_\beta|} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x_{\alpha i} + \sum_j \Omega_{ij}^{(\alpha)}(\tau) x_{\alpha j} + \sum'_\beta \sum_j K_{\alpha i, \beta j}(\tau) x_{\beta j} = 0. \quad (19)$$

$$(1 \leq \alpha, \beta \leq N, \quad 1 \leq i, j \leq 3)$$

ここで \sum'_β は $\beta = \alpha$ を除く和, $x_{\alpha i}$ は \vec{x}_α の i 方向成分 ($i = 1, 2, 3$)。また Ω, K の定義は

$$\Omega_{ij}^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{Gm}{\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha i} \partial X_{\alpha j}} \sum'_\beta \frac{1}{|\vec{X}_\alpha - \vec{X}_\beta|}, \quad (20)$$

$$K_{\alpha i, \beta j}(\tau) = -\frac{Gm}{\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial X_{\alpha i} \partial X_{\beta j}} \frac{1}{|\vec{X}_\alpha - \vec{X}_\beta|}. \quad (21)$$

式(18)と(20)の0次のポテンシャル和は平均場

$$\sum'_\beta \frac{1}{|\vec{X}_\alpha - \vec{X}_\beta|} = \int \frac{n(\vec{r})}{|\vec{X}_\alpha - \vec{r}|} d\vec{r} \quad (22)$$

で近似できる ($n(\vec{r})$ は個数密度)が, 式(21)のそれは式(19)でゆらぎ \vec{x}_β と couple しているのでそれが出来ないことに注意しておく。なお一様密度球 (個数密度 n_0) のとき上式は $2\pi n_0 (R^2 - X_\alpha^2/3)$ となる。

ゆらぎの式(19)を行列形式に直すと

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \vec{x} + \Omega(\tau) \vec{x} + K(\tau) \vec{x} = 0 \quad (23)$$

または ξ を式(4)で定義して

$$\frac{d}{d\tau} \xi + Q(\tau) \xi = 0, \quad Q(\tau) = \begin{pmatrix} O & -J \\ \Omega(\tau) + K(\tau) & O \end{pmatrix}$$

となる。ただし \vec{x} は3次元縦ベクトル x_α を $\alpha = 1, 2, \dots, N$ の順にたてに並べた $M(=3N)$ 次元縦ベクトルで, $\Omega(\tau) = \{\delta_{\alpha\beta} \Omega_{ij}^{(\alpha)}\}$, $K(\tau) = \{K_{\alpha i, \beta j}(\tau)\}$ で定義する M 次正方形行列の添字の扱いもそれに準じるものとする。また \sum'_β の意味を考慮して $\alpha = \beta$ のとき $K_{\alpha i, \beta j} = 0$ と定義しておく。 $\Omega(\tau)$, $K(\tau)$ とともに対称行列である。

以上で意図した定式化が済んだ。ゆらぎ \vec{x} (又は ξ) の動向を規定する行列 $\Omega(\tau)$, $K(\tau)$ (又は $Q(\tau)$) は系の0次の軌道運動 $\vec{X}_1(\tau)$, $\vec{X}_2(\tau)$, \dots , $\vec{X}_N(\tau)$ —

それらは式(18)の解——の様子を詳細に反映するものとなっている。ここで $\Omega(\tau)$ と $\mathbf{K}(\tau)$ のちがいを見ておこう。 $\Omega(\tau)$ は 3×3 行列 $\Omega^{(\alpha)} = \{\Omega_{ij}^{(\alpha)}\}$ ($i, j=1, 2, 3$) を $\alpha=1, 2, \dots, N$ の順に対角線に並べたもの (他の成分はゼロ) で本質的に次の一体問題

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \vec{x}_\alpha + \Omega^{(\alpha)}(\tau) \vec{x}_\alpha = 0 \quad (24)$$

を個々に ($\alpha=1, 2, \dots, N$) 記述するにすぎない。しかも行列 $\Omega^{(\alpha)}(\tau)$ の時間依存性は式(20)(22)から粒子 α 自身の 0 次軌道運動 $\vec{X}_\alpha(\tau)$ だけで定まる。実は上式が§1で紹介した“regular orbit”を定める方程式なのである。いま、与えられた 0 次ポテンシャル (22) の中で粒子 α の 0 次軌道が周期的であるとす。すると $\vec{X}_\alpha(\tau)$ から $\Omega^{(\alpha)}(\tau)$ が周期関数となり、式(24)は 3 次元 ($M=3$) の Hill の方程式に他ならない。するとフロケーの定理から (注(20)参照)

$$\vec{x}_\alpha(\tau) = \sum_{i=1}^6 e^{i\eta_i \tau} \vec{p}_\alpha^{(i)}(\tau), \quad \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_6 = 0,$$

ただし 3 次元ベクトル $\vec{p}_\alpha^{(i)}(\tau)$ は $\vec{X}_\alpha(\tau)$ と同じ周期を持つ任意の周期関数。 η_i ($i=1, 2, \dots, 6$) が 0 又は純虚数なら $\vec{x}_\alpha(\tau)$ は安定である。仮に $\eta_1 \dots \eta_4 = 0$, $\eta_5 = i\mu$, $\eta_6 = -i\mu$ (μ は実数) としよ (注(19)参照)。すると $\vec{x}_\alpha(\tau)$ は周期 $2\pi/\mu$ と $\vec{X}_\alpha(\tau)$ の周期とが組み合わさった複雑な振動をし、一般に両周期の比は有理数にならない (incommensurable) から $\vec{X}_\alpha(\tau) + \vec{x}_\alpha(\tau)$ は $\vec{X}_\alpha(\tau)$ のまわりに閉じた軌道を作らない。従ってそれは周期軌道を取り囲む或る空間領域を埋め尽くす。同じ $\vec{X}_\alpha(\tau)$ に対してこういう $\vec{x}_\alpha(\tau)$ は他にもあり、これらが集まって regular orbit の“family”をなす。その“parent”が周期軌道 $\vec{X}_\alpha(\tau)$ である。この議論はこの周期軌道の安定性(それが“parent”の資格)を論じていることにもなる。⁽²⁶⁾

(24) 式(3)の第二項にあたるものが無いが、これは本質的でない。

(25) 6×6 定数行列 A の固有値 ρ_i から $\rho_i = e^{i\tau_0 \eta_i}$ で定まる。 τ_0 は $\vec{X}_\alpha(\tau)$ の周期。

(26) Binney and Tremaine, 前掲書 (注(7)), p. 175~177, で簡潔にふれてある。また“surface of section”上での位置ゆらぎとしてではあるが ($M=2$) 本質的に同じ考察をしそれを棒状銀河内の軌道不安定性に応用した D. Pfenniger, *Astron. and Astrophys.* (1985) 150, 97/同112, を参照。

これに対して $K(\tau)$ は系のゆらぎの協同的 (cooperative) なふるまいを記述する、そのつなぎの役目を果たしている。これは式(19)の左辺第3項が、 \vec{x}_α の運動に他のすべての $\vec{x}_\beta (\beta \neq \alpha)$ が関与するさまを表わしていることからわかる。この第三項は流体近似の言葉で表わすと、密度ゆらぎ $\delta\rho(\vec{r}, t)$ に伴うポテンシャルゆらぎ $\delta\phi(\vec{r}, t)$ が引き起こす力に相当する⁽²⁷⁾。 $\Omega(\tau)$ のみによる周期的軌道の安定性の解析は、自己重力系において本質的なこの多体効果は無視した議論であることに注意しなければならない。従ってそれに基づく一体問題としての “regular orbit” の概念やその線型的重ね合わせによる Schwarzschild の銀河モデルも、 $K(\tau)$ 項を入れた多体問題の土俵上で再吟味される必要があることを指摘しておく。次章で扱う一様密度球モデルは $\Omega(\tau)$ が定数行列 (単位行列) になり多体効果 $K(\tau)$ のみが純粋に \vec{x} の運動を支配する、特殊なケースとなっている。

この一様密度球ではすべての0次の軌道が同じ時間依存性と 同じ初期値 ($\vec{X}_\alpha(0), \vec{V}_\alpha(0)$) 依存性を持っている (次章の式(26))。だから0次の内部構造の記述は I -空間 (6N次元) での “超” ミクロな表現による必要はなく、 μ -空間 (6次元) における個数分布 $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ の指定で十分である。このことは不安定性の十分条件(17)にも次の形で現われている。行列 P_n は $\vec{X}_\alpha(0), \vec{V}_\alpha(0) (\alpha=1, 2, \dots, N)$ のみの関数で、各 γ_k は式(16)からこれらの積の対角和で定まる。積や対角和の演算は系内の全粒子についての和 $\sum_{\alpha=1}^N$ に対応し、これはそのつど分布関数 $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ を掛けて $d\vec{r} d\vec{v}$ について積分することに相当する。つまり不安定性の判定に際し、系の0次の構造は $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ を通して表現されている。

ここで分布関数 $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ を直接に解析することによる星系の安定性問題

(27) 直接示せる。ゆらぎ $\vec{x}_\beta(\tau)$ を粒子 β の位置 \vec{r} でのグランジュ変位 $\vec{\eta}(\vec{r}, t)$ と見なして $\delta\rho(\vec{r}, t) = -\text{div}(\rho\vec{\eta})$ で関係づければよい。

(28) このとき前述の $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$ はすべてゼロとなり regular orbit family は存在しない。これは family 全員が parent のもとに “縮退” したとも、あるいは全員が “一人立ち” して (family を持たない) parent になったとも言える。

について、次章との関連事項を中心にふれておく。星系は球対称密度分布のものとする。一般に自己重力系の $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ は無衝突ボルツマン方程式⁽²⁹⁾とポアソン方程式を連立させたものに従う。その平衡解 ($\partial/\partial t=0$) $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ は平衡ポテンシャルの下での“運動の積分”のみの関数であり、かつ“運動の積分”の任意関数は平衡解 f_0 となり得る (Jeans の定理)⁽³⁰⁾。従って球対称密度分布の系の f_0 はエネルギー E と角運動量 L の任意関数として無数にある⁽³¹⁾。Polyachenko⁽³²⁾ らは、その中で星系モデルとして不自然でないいくつかの典型的な f_0 のシリーズ⁽³³⁾ をとり上げ、その安定性 (つまりゆらぎ $\delta f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ の成長の可否) を精力的に研究した。そして、それを通じて得た数値的経験則として f_0 にあまりよらない次の安定性 criterion

$$\zeta \equiv \frac{2 \overline{v_r^2}}{v_\perp^2} \begin{cases} < \zeta_0 \equiv 1.75 \pm 0.25 & \text{なら系は安定} \\ > \zeta_0 & \text{なら系は不安定} \end{cases} \quad (25)$$

を見出している。ここで $\overline{v_r^2}$, v_\perp^2 はそれぞれ動径方向、動径垂直方向の速度の (全系にわたる) 2乗平均。系が円軌道のみ、直線軌道のみから成るときそれぞれ $\zeta=0, \infty$ (等方速度分布のとき $\zeta=1$) だから、 ζ は系の直線的軌道の含有量の目安である。事実、直線軌道のみからなる系 — f_0 の \vec{v} 依存性は $\delta(v_\theta) \delta(v_\phi)$ — は任意の摂動に対して不安定であることが解析的に厳密に証明されている⁽³⁴⁾。次章のモデルである一様密度球の f_0 としては、円軌道のみからなる

(29) 系内の各種拡散効果が無視できない場合は代りに Fokker-Planck 方程式。直接これを使って星系コアの collapse を論じた例として、H. Cohn, I. A. U. Symposium No. 113 (1985) ed. by J. Goodman and P. Hut, p. 161.

(30) Binney and Tremaine, 前掲書 (注(7)), 4・4章。

(31) 一般にはベクトル \vec{L} だが、“全系の角運動量ベクトル $\neq 0$ ” の特別の場合以外は $L (=|\vec{L}|)$ 。前注の書。

(32) A. M. Fridman and V. L. Polyachenko, “Physics of Gravitating Systems, Vol. I” (1984), Springer-Verlag, の Chapter III, §6。以下FPと略記する。

(33) たとえば “一般化ポルトロープ” 又は Camm の分布関数と呼ばれる $f_0 \sim L^\alpha (E_0 - E)^\beta$, ($\alpha > -1, \beta > -2$)。 $\beta \rightarrow -2, \infty$ のときそれぞれ直線軌道のみ、円軌道のみとなる。 $\beta=0$ は等方速度分布の系。なお、この f_0 の安定性問題に関する追加として J. Barnes, I. A. U. Symposium No. 113 (1985), ed. by J. Goodman and P. Hut, p. 297, 参照。

(34) V. A. Antonov (1973)による。FP 前掲書, Chapter III, §5。

$$f_0 = \text{const.} \frac{\theta(R-r)}{r} \delta(v_r) \delta(v_\perp - r\omega_0)$$

($\theta(x)$ は階段関数) と, さまざまの離心率の楕円軌道の混合からなる

$$f_0 = \text{const.} \frac{1}{\sqrt{(R^2 - r^2)(\omega_0^2 R^2 - v_\perp^2) - v_r^2}} \quad (35)$$

が知られている ($\omega_0^2 = 4\pi G\rho_0/3$)。これらはともに安定であることが示されている。⁽³⁶⁾

§4 一様密度球の星系の安定性

前章で定式化した星系安定性問題に§2の結果をそのまま適用できるのは, 一様密度球の星系の場合に限られる。このとき, 1)すべての0次の軌道が同一周期⁽³⁷⁾なので行列 $K(\tau)$ が単一の周期を持ち, 2) $\Omega(\tau)$ が定数しかも単位行列になる, からである。後者は $\omega_0^2 = 4\pi Gm_0/3$ と式(20)(22) から $\Omega_{ij}^{(q)} = \delta_{ij}$ となるから。本章はこの星系モデルをとり上げそのパラメータ共鳴による不安定性を論じる。具体的にはこの星系について式(16)の $\gamma_k (k=0, 1, 2, \dots)$ を求め不安定性 (十分) 条件(17)と照合するわけだが, ここでは計算の済んでいる γ_2 までを報告する。従って本章の結論は γ_2 までの近似の範囲内での不安定性の考察であることを, あらかじめことわっておく。

まず0次の運動は式(18)と(22)から

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \vec{X}_\alpha + \vec{X}_\alpha = 0$$

となる (等方3次元調和振動子)。この解は

(35) 注(33)の α -一般化ポルトロープ α の $\alpha = -1/2, \beta = 0$ にあたる (FP前掲書, p. 145)。なおこの f_0 の $\overline{v_r^2}, \overline{v_\perp^2}$ はそれぞれ $1/10, 1/2$ となるから $\zeta = 2/5 (< \zeta_0)$ 。

(36) FP 前掲書, Chapter III, §3, §4。原論文はそれぞれ, L. Schipper and I.R. King, *Astrophys. J.* (1978) 220, 798, および V. L. Polyachenko and I. G. Shukham, *Sov. Astron.* (1973) 17, 413/(1974) 17, 460。なお, 直線軌道のみからなる一様密度球の f_0 は構成不可能である (FP前掲書, p. 148)。

(37) 球対称ポテンシャル $\varphi(r)$ ですべての軌道が閉じるのは一様密度球 ($\varphi \sim r^2$) とケプラー場 ($\varphi \sim -1/r$) の2つしかない。後者は粒子のエネルギーによって周期が異なる。ランダウ・リフシッツ「力学」(1966), 東京図書, §14。

$$\vec{X}_\alpha(\tau) = \vec{X}_\alpha(0) \cos \tau + \vec{V}_\alpha(0) \sin \tau, \quad \left(\vec{V}_\alpha \equiv \frac{d}{d\tau} \vec{X}_\alpha \right) \quad (26)$$

で周期 2π の平面内楕円軌道。初期値 $\vec{X}_\alpha(0), \vec{V}_\alpha(0)$ のとり方によって円軌道にも直線軌道にもなり得る。式(21)から $K(\tau)$ を定めるのは任意の2粒子 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ の相対運動

$$\begin{aligned} \vec{Z}_{\phi_\beta}(\tau) &\equiv \vec{X}_\alpha(\tau) - \vec{X}_\beta(\tau) = \vec{a}_{\alpha\beta} \cos \tau + \vec{b}_{\alpha\beta} \sin \tau & (27) \\ \begin{cases} \vec{a}_{\alpha\beta} &\equiv \vec{X}_\alpha(0) - \vec{X}_\beta(0) \\ \vec{b}_{\alpha\beta} &\equiv \vec{V}_\alpha(0) - \vec{V}_\beta(0) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、これも1粒子と全く同じ性格のふるまいをする。つまり周期 2π の平面内楕円軌道である。これを次の形にしておく

$$|\vec{Z}_{\alpha\beta}|^2 = l_{\alpha\beta}^2 [1 - e_{\alpha\beta}^2 \sin^2(\tau + \phi_{\alpha\beta})]. \quad (28)$$

ここで $l_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}$ (長半径, 離心率, 初期位相) は初期値 $\vec{a}_{\alpha\beta}, \vec{b}_{\alpha\beta}$ で定まる定数であり, $0 \leq e_{\alpha\beta} < 1$ ($e_{\alpha\beta} = 1$ は2粒子の直接衝突を意味するので除いてよい)。

よってゆらぎの運動方程式(23)は

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x} + \bar{x} + K(\tau) \bar{x} = 0; \quad K(\tau + \pi) = K(\tau) \quad (29)$$

となり、式(3)の $\nu=1$ の場合に相当する。 $K(\tau)$ が周期 π を持つことは定義式(21)に(27)を代入してわかる。また $K(\tau)$ は対称行列である。

式(16)から $\nu=1$ として

$$\gamma_0 = 2M, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^2}{4} \text{tr} \{ (P_0)^2 - |P_1|^2 \}$$

が導かれ、 $\gamma \equiv \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ とおくと

$$\gamma = -2M \left[1 - \frac{\pi^2}{8M} \text{tr} \{ (P_0)^2 - |P_1|^2 \} \right] \quad (30)$$

となる。不安定性(十分)条件(13)は、 γ_2 までの近似で $\text{tr} A \cong \gamma$ として $|\gamma| > 2M$, つまり

$$\text{tr} \{ (P_0)^2 - |P_1|^2 \} < 0 \quad (31)$$

である。左辺は系の全粒子の初期値 $\vec{X}_\alpha(0), \vec{V}_\alpha(0) (\alpha=1, 2, \dots, N)$ の μ -空間での分布, つまり §3 でふれたように 0 次の分布関数 $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ に依存する。今の場合, 前者は任意の 2 粒子 α, β が描く楕円の軌道要素 $l_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}$ を通してのみ現われるので, 左辺は系の粒子のすべての pairs ($\alpha, \beta=1, 2, \dots, N; \alpha \neq \beta$) に関する l, e, ϕ の分布で定まる量である。しかし Appendix(C) での計算により, l, e の分布の如何にかかわらず (ϕ 依存性は消える) 式 (31) が成立することが示される。つまり一様密度球星系は, パラメータ共鳴の機構により不安定である。

この結論が任意の f_0 に対してであることは, 分布関数の解析により安定な一様密度球の f_0 の存在が確かめられている (§3 の末尾) ことと両立しない。この不一致に関し 2 点コメントしておこう。1 つは, どちらのアプローチも一様密度球星系の安定性に関する普遍的結論とはほど遠い——本稿は $\text{tr}A$ を $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ で近似したことにより, また分布関数アプローチは式 (25) の $\zeta < \zeta_0$ にあたる f_0 しか調べていないことにより——ので本質的不一致とはまだ言えないことである。2 つめに, しかしながら本質的不一致の可能性も想定し得る。というのは本稿で扱った不安定性は明白なパラメータ共鳴であるが, この機構が分布関数アプローチの守備範囲内に含まれているかどうか疑問が残るからである。この点に関しては検討を要するものと思われる。

式 (30) の γ の形は, §2 の終りに述べた Mathieu 方程式 ($M=1$) の $\nu \rightarrow 1$ ($a \rightarrow 1$) での $\gamma \cong -2 [1 - (\pi^2/8) \{(a-1)^2 - q^2\}]$ と酷似していることに気が付く。しかしもとの方程式を見ると Mathieu 方程式 (2) では a が $a \approx 1$ の近傍のフリーパラメータであるのに反し, 式 (29) では対応する ν^2 が初めから $\nu=1$ と固定されてしまっている。この見かけ上のちがいは後者の式に対し注 (22) で述べたような手直しをすれば解消される。つまり $A (\equiv J + P_0)$ を定数行列とした

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \bar{x} + A\bar{x} + K_1(\tau)\bar{x} = 0 \quad (38)$$

は、 $K_1(\tau) (=K(\tau) - P_0)$ が 1 周期平均すると零行列なので、Mathieu 方程式と完全に対応する： $a \leftrightarrow A$ 、 $-2q \cos \tau \leftrightarrow K_1(\tau)$ 。従って $(a-1)$ と q に対応するフリー・パラメータが $A - J = P_0$ と $P_1 (=K_1(\tau)$ の「振幅」) であり、 γ の表式の中の $(a-1)^2$ 、 q^2 にあたる所にそれぞれ $\text{tr}(P_0)^2$ 、 $\text{tr}|P_1|^2$ が現われているのである。

§5 お わ り に

最後に簡単に background としての問題意識を述べ、次のステップへのいささか speculative な展望を付け加える。

星系が孤立したものでなく外力（他の天体による潮汐力）の揺乱をうけるとき、ゆらぎの方程式は線型の範囲で $d\xi/d\tau + Q(\tau)\xi = F(\tau)$ ⁽³⁹⁾ となる。この解はこれの斉次方程式 $d\xi/d\tau + Q(\tau)\xi = 0$ の基本解行列を $X(\tau)$ として $\xi(\tau) = X(\tau) \int_0^\tau X^{-1}(\tau') F(\tau') d\tau'$ となり、内部エネルギー励起量は $\Delta E = \int_0^\infty d\tau \int_0^\tau d\tau' F^\dagger(\tau) X(\tau) X^{-1}(\tau') F(\tau')$ で与えられる。つまり ΔE は安定性問題（斉次方程式）の解 $X(\tau)$ に基本的に左右され、これは $Q(\tau)$ を通じて系の内部構造——0 次の軌道運動の詳細——に支配される。内部構造の違いが ΔE に上下⁽⁴⁰⁾ どれだけの幅を与え得るか、が筆者の当初の問題であり、本稿はワン・ステップとしてその方向での安定性問題の定式化をし、やや特殊な case study ではあるが一様密度球の安定性を考察した。最後の件に関しては、高次の γ^k の計算や分布関数アプローチとの関係など、やり残したことが少くない。

(38) 対称実行列 A を対角化するユニタリー行列 U に対し $(U^{-1}\bar{x})_i$ が（第三項が無いとき）振動数 ω_i を持つ自由振動のモードになる ($i=1, 2, \dots, M$)。ただし $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_M^2$ は対角行列 $U^{-1}AU$ の対角成分。各モードは第三項によって（線型に）couple している。

(39) $F(\tau)$ は $2M$ 次元縦ベクトルで、系内の粒子（の単位質量あたり）に働く外力を示す M 次元縦ベクトルを $\vec{f}(\tau)$ とすると、 $F^\dagger(\tau) \equiv (0, \vec{f}^\dagger(\tau)/\omega_0^2)$ で定義される。ダガー記号 \dagger は転置を表わす。

(40) 定量的には線型近似で済まされない問題である。多くの場合、線型近似での解の発散という事態が非線型的扱いの必要性を示す指標となる。

§1で系の内部構造が {parent+family} をワンセットとする軌道族（それはポテンシャルの自由度に応じた必要な個数だけの保存量で指定される⁽⁴¹⁾）を多数重ね合わせたものとして表現される，という観点を簡単に紹介した。次のステップとして興味があるのは，（いわば原子核の殻模型のように）系が独立な軌道族の集まりであるとするこの描像を，星系の安定性問題ひいては内部エネルギー励起問題の記述にとり入れることである。そのためには1つの問題を乗り越えねばならない。“独立な軌道族”という第0近似的（あるいは一体問題的）概念が，§3で指摘したように，式(23)の $K(\tau)$ の項で表わされる多体効果を考慮に入れたとき根本的変更を受けずに済むか，という問題である。いわばこの描像そのものの“安定性”問題と言える。否定的な答となるかもしれない，或いは初めの“独立な軌道族”が $K(\tau)$ 項による淘汰を受けてその一覧表に○×がつけられるかもしれない。もし各軌道族が基本的に独立性を保持しつつ，多体効果はそれらの間の弱い結合（それに伴う1つの族から他の族への粒子の“遷移”）ないし個々の族の変形をもたらすのみ，という結論になれば上記の目論はとりあえず立脚点を得たことになる。次のステップへの展望はこの解析の結果にかかっていると見えよう。

Appendix (A)

解 $\xi(\tau) = X(\tau)\xi_0$ で ρ をスカラー定数とした次の性質

$$\xi(\tau + \pi) = \rho \xi(\tau)$$

をみたすものを探す。式(9)からこれは $X(\tau)(A - \rho I)\xi_0 = 0$ ， $X(\tau)$ が正則だから $(A - \rho I)\xi_0 = 0$ 。ここで ξ_0 は零ベクトルでないから（もしそうなら $\xi(\tau)$

(41) 保存量の個数が不足のもの，特に1個（エネルギー）のみの *irregular orbit*（又は *stochastic orbit*）もしばしば存在し *regular orbit* からなる軌道族の占める空間領域に浸入して複雑な境界領域を作る。同時に，*non-classical*（又は *effective*）*integral* という数値計算的保存量は *time span* に依存する相対的概念であることにも注意する必要がある。Schwarzschild (1981), 前掲論文（注(5)の2つめ），および Binney and Tremaine (1987), 前掲書(注(7)), Chapter 3・5。

$\equiv 0$ という無意味な解になる)

$$\det (A - \rho I) = 0.$$

この固有値と固有ベクトルを $\rho_i, \xi_0^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, 2M$) とする。 $\xi^{(i)}(\tau) \equiv X(\tau)\xi_0^{(i)}$ とおくと $A\xi_0^{(i)} = \rho_i\xi_0^{(i)}$ と式(9)から

$$\xi^{(i)}(\tau + \pi) = \rho_i \xi^{(i)}(\tau). \quad (A1)$$

式(12a)から $\rho_i \neq 0$ だから $\rho_i \equiv e^{\pi \eta_i}$ とおける。同じ式から $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{2M} = 0$ である。式(A1)をみたす $\xi^{(i)}(\tau)$ の一般形は

$$\xi^{(i)}(\tau) = e^{\eta_i \tau} q^{(i)}(\tau)$$

ここで $q^{(i)}(\tau)$ は周期 π の任意関数で $2M$ 次元縦ベクトル。任意の ξ_0 は $\xi_0^{(i)}$ の、従って任意の $\xi(\tau) = X(\tau)\xi_0$ は $\xi^{(i)}(\tau) = X(\tau)\xi_0^{(i)}$ の一次結合で表わせるから、本文の Floquet の定理が得られる。ただし一次結合 $\xi(\tau) = \sum_i c_i \xi^{(i)}(\tau) = \sum_i c_i e^{\eta_i \tau} q^{(i)}(\tau)$ の定数 c_i を $q^{(i)}(\tau)$ に含ませたものをあらためて $q^{(i)}(\tau)$ とおいた。

Appendix (B)

式(9)で $\tau=0$ とおくと $A = X(\pi)$, 従って $X(\tau)$ をまず求める。式(4)の $Q(\tau)$ から定数行列を分離して

$$Q(\tau) = \begin{pmatrix} O & -J \\ \nu^2 J & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & O \\ K(\tau) & O \end{pmatrix} \equiv Q_0 + Q_1(\tau)$$

とおくと式(6)は

$$-\frac{d}{d\tau} X(\tau) + Q_0 X(\tau) = -Q_1(\tau) X(\tau)$$

$$\therefore \frac{d}{d\tau} \{e^{\tau Q_0} X(\tau)\} = -e^{\tau Q_0} Q_1(\tau) e^{-\tau Q_0} \{e^{\tau Q_0} X(\tau)\}$$

$W(\tau) \equiv e^{\tau Q_0} Q_1(\tau) e^{-\tau Q_0}$ とおいて積分すると、 $\tau=0$ のとき $e^{\tau Q_0} X(\tau) = I$ に注意し、

$$e^{\tau Q_0} X(\tau) = I + (-1) \int_0^\tau d\tau' W(\tau') \cdot e^{\tau' Q_0} X(\tau'),$$

左辺を逐次右辺に代入して（収束性は仮定する）

$$= I + (-1) \int_0^\tau d\tau_1 W(\tau_1) + (-1)^2 \int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 W(\tau_1) W(\tau_2) + \dots$$

両辺に $e^{-\tau Q_0}$ を（左から）かけて $X(\tau)$ の表式が得られる。ここで $e^{-\tau Q_0}$ は三角関数を成分とする次の $2M$ 次正方行列である、

$$e^{\tau Q_0} = \begin{pmatrix} \cos \nu\tau \cdot J & -\frac{1}{\nu} \sin \nu\tau \cdot J \\ \nu \sin \nu\tau \cdot J & \cos \nu\tau \cdot J \end{pmatrix}.$$

これは $Q_0^{2m} = (-1)^m \nu^{2m} I$, $Q_0^{2m+1} = (-1)^m \nu^{2m+1} \begin{pmatrix} O & -\frac{1}{\nu} J \\ \nu J & O \end{pmatrix}$ と $e^{\tau Q_0} =$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\tau Q_0)^m \text{ とから得られる。}$$

以上から $\text{tr} A = \text{tr} X(\pi) = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$ とおくと

$$\gamma_0 = \text{tr} \{e^{-\pi Q_0}\} = 2M \cos \nu\pi$$

$$\gamma_1 = (-1) \int_0^\pi d\tau_1 \text{tr} \{e^{-\pi Q_0} W(\tau_1)\}$$

$$\gamma_k = (-1)^k \int_0^\pi d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \text{tr} \{e^{-\pi Q_0} W(\tau_1) W(\tau_2) \dots W(\tau_k)\} \\ (k \geq 2)$$

ここで

$$e^{-\pi Q_0} W(\tau_1) W(\tau_2) \dots W(\tau_k) \\ = e^{-(\pi-\tau_1)Q_0} Q_1(\tau_1) e^{-(\tau_1-\tau_2)Q_0} Q_1(\tau_2) \dots e^{-(\tau_{k-1}-\tau_k)Q_0} Q_1(\tau_k) e^{-\tau_k Q_0}$$

に $e^{-\tau Q_0}$ と $Q_1(\tau)$ の表式を代入して対角和をとれば式(16)が得られる。

Appendix (C)

$K(\tau)$ が対称行列であることに注意すると、定義式(15)を使って

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \text{tr} \{(P_0)^2 - |P_1|^2\} \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \sum_{\alpha, \beta} \int_0^\pi d\tau \int_0^\pi d\tau' \{1 - \cos 2(\tau - \tau')\} \cdot \\ &\quad \times \sum_{i, j} K_{\alpha i, \beta j}(\tau) K_{\alpha i, \beta j}(\tau') \end{aligned} \tag{A2}$$

ここで $\vec{Z} \equiv \vec{X}_\alpha(\tau) - \vec{X}_\beta(\tau)$, $\vec{Z}' \equiv \vec{X}_\alpha(\tau') - \vec{X}_\beta(\tau')$ とおくと Z, Z' は式(28)の平方根の形で、また $\vec{Z}\vec{Z}'$ は同式の $l_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}$ を使って

$$\begin{aligned} \vec{Z}\vec{Z}' &= l_{\alpha\beta}^2 \{ \cos(\tau + \phi_{\alpha\beta}) \cos(\tau' + \phi_{\alpha\beta}) \\ &\quad + (1 - e_{\alpha\beta}^2) \sin(\tau + \phi_{\alpha\beta}) \sin(\tau' + \phi_{\alpha\beta}) \} \end{aligned}$$

と表わせる。何故なら \vec{Z} と \vec{Z}' は同一平面内 (x, y 平面とする) を動くので $\vec{Z} = (Z_x, Z_y, 0)$; $Z_x = l_{\alpha\beta} \cdot \cos(\tau + \phi_{\alpha\beta})$, $Z_y = l_{\alpha\beta} \sqrt{1 - e_{\alpha\beta}^2} \sin(\tau + \phi_{\alpha\beta})$ と書け、 \vec{Z}' も同様 ($\tau \rightarrow \tau'$) だから。式(21)から $K_{\alpha i, \beta j}(\tau) = (Gm/\omega_0^2) (3Z_i Z_j - \delta_{ij} Z^2)/Z^5$ となるから

$$\sum_{i,j} K_{\alpha i, \beta j}(\tau) K_{\alpha i, \beta j}(\tau') = 3 \left(\frac{Gm}{\omega_0} \right)^2 \left\{ 3 \frac{(\vec{Z}\vec{Z}')^2}{Z^5 Z'^5} - \frac{1}{Z^3 Z'^3} \right\}$$

これを式(A2)に入れると被積分関数はパラメータとして $l_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}$ のみを含む。しかも周期 $= \pi$ だから積分すると $\phi_{\alpha\beta}$ が消える。

以上から、 $q = e_{\alpha\beta}^2$ ($0 \leq q < 1$) とおいて

$$\Delta = 3 \left(\frac{Gm}{\pi \omega_0} \right)^2 \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{1}{l_{\alpha\beta}} \right)^6 w(q) \quad (A3)$$

$$w(q) \equiv \int_0^\pi d\tau \int_0^\pi d\tau' \{1 - \cos 2(\tau - \tau')\} \cdot [h_0(\tau, \tau', q) - h_1(\tau, \tau', q)]$$

$$\begin{cases} h_0 \equiv 3 [\cos^2 \tau \cos^2 \tau' + (1-q)^2 \sin^2 \tau \sin^2 \tau' \\ \quad + \frac{1}{2} (1-q) \sin 2\tau \sin 2\tau'] / (1-q \sin^2 \tau)^{5/2} (1-q \sin^2 \tau')^{5/2} \\ h_1 \equiv 1 / (1-q \sin^2 \tau)^{3/2} (1-q \sin^2 \tau')^{3/2} \end{cases}$$

このあとの時間積分の各項はすべて次の第一種、第二種の完全楕円積分 F, E

$$F = F(q) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - q \sin^2 x}}$$

$$E = E(q) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q \sin^2 x} dx$$

に帰着させることができる。その変形のためには

$$\frac{dE}{dq} = \frac{1}{2q} (E - F), \quad \frac{dF}{dq} = \frac{1}{2q} \left\{ \frac{E}{1-q} - F \right\}$$

および

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{1-q \sin^2 x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x dx}{(1-q \sin^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{q}(-E+F)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-q \sin^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{(1-q)} \cdot E$$

の諸公式が手もとにあれば十分である。

結果として式(A3)の $w(q)$ は E, F に関する次の 2 次式になる ($q \neq 0$):

$$w(q) = -\frac{16}{3q^4(1-q)} \cdot f(q)$$

$$f(q) = \lambda_1 E^2 - \lambda_2 EF + \lambda_3 F^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 16(1-q) + q^2 \\ \lambda_2 = 16(2-q)(1-q) \\ \lambda_3 = (1-q)(4-q)(4-3q). \end{cases}$$

$f(q)$ の E, F に関する判別式は

$$D = \lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3 = -3q^4(1-q) < 0$$

かつ $\lambda_1 > 0$ だから $f(q) > 0$, よって $0 < q < 1$ に対し $w(q) < 0$ 。 $q=0$ のときは $w(0) = -1/4 < 0$ 。以上から, 軌道のパラメータ $l_{\alpha\beta}, e^2_{\alpha\beta}$ ($0 \leq e^2_{\alpha\beta} < 1$) の任意の値に対して式 (A3) の $(1/l_{\alpha\beta})^6 w(q) < 0$ だから $A < 0$ である。