

神戸市外国語大学 学術情報リポジトリ

On the Tidal Excitation of Internal Degrees of Freedom of Celestial Bodies

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 1983-12-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 佐藤, 通, Sato, Toru メールアドレス: 所属:
URL	https://kobe-cufs.repo.nii.ac.jp/records/2238

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



潮汐力による天体の内部自由度 励起の諸問題

佐藤 通

§ 1. Introduction

宇宙は大まかに言えば星と gas とで構成された system であり、星系の性質と gas 系の性質の研究は天体物理学の基礎をなす。この両者は類似点よりは相違点の方がはるかに多い。しかし gas 系に対する popular な概念であった冷却と加熱の作用が似たような形で星系にもあることが指摘され、両者の少ない類似点が1つ増したと言える。Press and Teukolsky (1977)⁽¹⁾ (以下本文では PT と略記) は星どうしの2体非弾性散乱による二重星形成を論じるために、潮汐力による星の固有振動モードの励起を計算した。この process は星系にとって冷却作用として働くものであるが、一方二重星と単星との encounter⁽²⁾ において超弾性散乱が起り得ることが前から指摘されていた。これは星系にとって加熱作用として働く。球状星団などの力学的進化はこの両方の作用を考慮に入れたとき、これまでの理論と大きく食い違い得ることが Ozernoy⁽³⁾ たちによって示された。星系におけるこの2つの作用は (gas 系とちがって) どちらも潮汐力による天体の内部自由度励起 (又

(1) W. H. Press and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.* 213 (1977), 183. なお着想の発端は A. C. Fabian, J. E. Pringle and M. J. Rees, *Mon. Not. R. A. S.* 172 (1975), 15 P.

(2) D. C. Heggie, *Mon. Not. R. A. S.* 173 (1975), 729.

J. G. Hills, *Astron. J.* 80 (1975), 809.

(3) L. M. Ozernoy and V. I. Dokuchaev, *Astron. and Astrophys.* 111 (1982), 1.

V. I. Dokuchaev and L. M. Ozernoy, *Astron. and Astrophys.* 111 (1982), 16.

は脱励起) という同一カテゴリーの **process** であるという点に特徴を見出すことができる。

潮汐力は潮の干満を引き起こす月と太陽からの力として **Newton** 以来よく知られたものである。たとえば月がいつも地球に同じ側を見せていることや、月が地球から少しずつ遠ざかっていること (毎年約 3 cm) などはこの力による身近な現象として周知のものである。潮汐力の特徴は相手の重心運動でなく内部運動に作用するという性格にあるが、このことが星などの天体の内部運動を励起する根拠となる。ちょうど電子などの荷電粒子の場が、近くの原子の内部に電気双極子等を誘起して内部 **energy** を励起するようなものである。本稿はこのカテゴリーが天体物理学のより広い範囲において有用な概念であると考えて、その一般化への展望と応用例および問題点を指摘することを試みる。

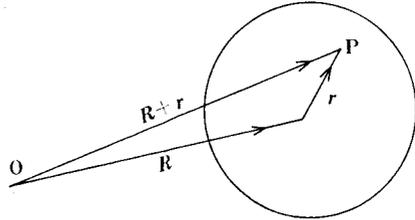
現在の宇宙の物質は90%以上が恒星の姿で存在しており、これらの星は星団、銀河、銀河集団、超銀河集団……という階層構造をなして空間的に分布している。ひとつの星団の又はひとつの銀河集団の力学的進化を考える場合、近似として前者では星を後者では銀河を質点として扱い問題を単純化することができる。孤立したN質点系として扱う限り星団も銀河集団も同じ問題となる。次の近似を進めることは構成要素の内部構造 (従って内部自由度) を考慮に入れることであり、ここで各階層の特殊性が顔をのぞかせる。Hierarchical な分布をなす約 10^{22} 個の恒星からなる現宇宙の主要なしかしゆるやかな進化を扱う際、各階層ごとの力学的進化を、“内部自由度を有する構成要素からなるN体系”という共通の視点で見れば行けるとすれば面白い。その際、階層ごとの違いは構成要素の内部自由度の違いに由来し、その内部自由度との **energy** のやりとりは潮汐力を通じて可能となるのである。

以下各章の概容は次のとおりである。§ 2 は星どうしの 2 体非弾性散乱の初等的理解を行ない、それを足場にこれまでの研究の **survey** と展望。§ 3 は非弾性散乱が星の系に対して与える冷却効果の応用例として、星の系にお

ける熱的不安定ゆらぎの成長の可否について検討し、特殊な条件下とはいえ成長が可能であることを示す。§ 4は hierarchical な分布をする星の系の場合の非弾性散乱について若干の survey と注意点を、§ 5では全体の問題点とともに宇宙論との関連についてコメントする。

§ 2. 星の2体非弾性散乱

力の中心Oを原点とし、広がりを持った物体系の重心の位置を \mathbf{R} とすると重心に対し \mathbf{r} だけ離れた位置Pのポテンシャルは、 $R \gg r$ として次のように書ける、



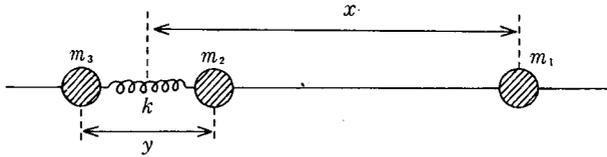
$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = & \varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) + \frac{1}{2!} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right)^2 \varphi(\mathbf{R}) \\ & + \frac{1}{3!} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right)^3 \varphi(\mathbf{R}) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

従ってPに作用する重心に相対的な力は

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \\ = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) \\ & - \frac{1}{2!} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) \dots \end{aligned}$$

この第一項は \mathbf{r} によらず全系に一樣に働く力であり系全体の並進運動を引きおこす。第二項以下は重心に相対的な系の内部運動を誘起する力であり、これを潮汐力 (tidal force) と呼んでいる。式(1)では第3項以下が潮汐力ポテンシャルに相当する。系の大きさを a とすると展開は微小量 a/R のべき展開である。以下で φ は重力ポテンシャルである。

潮汐力による内部運動の励起を一次元の簡単なモデルで定量的に調べてみよう。下図のように直線上に質量 m_1 , m_2 , m_3 の3個の質点が並び、 m_2



と m_3 は強さ k のバネで連結されているとする。3個の質点には相互に重力が働いているが、 m_2 と m_3 の間の重力はバネの平衡位置と k に繰り込んである。 m_2 と m_3 の間隔を y 、 m_2m_3 の重心と m_1 との間隔を x とすると運動方程式は次のようになる、

$$\begin{cases} \frac{m_1(m_2+m_3)}{M} \ddot{x} = -\frac{Gm_1(m_2+m_3)}{x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{m_2m_3}{m_2+m_3} \ddot{y} = -k(y-y_0) - \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

ここで $M = m_1 + m_2 + m_3$ 、 U は潮汐力ポテンシャルであり最低次項だけとると

$$U = -G \frac{m_1 m_2 m_3}{m_2 + m_3} \cdot \frac{y^2}{x^3}.$$

バネでつながれた系（以下振動系と呼ぶ）に注目すると、式(2)は振動系に外から潮汐力が作用する様を記述している。いま全体を解くかわりに、はじめ静止した振動系 ($y = y_0$) に対し無限遠から m_1 が近づいて来て $x = x_0$ まで接近したあと再び無限遠まで引返すとし、 x の時間変化として次のモデルをとることにしよう、

$$x = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 t^2}, \quad (t = -\infty \sim +\infty).$$

これは固定点 O に対して衝突径数 x_0 、速さ v_0 の等速直線運動をする物体の O に対する距離の表式であり、 v_0 は放物運動をするときの近日点距離 x_0 における速度に等しくとっておく。このとき式(2)は $\xi \equiv y - y_0$ として次の形になる、

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{1}{\mu} f(t).$$

ただし $\mu \equiv m_2 m_3 / (m_2 + m_3)$ 、 $\omega^2 \equiv k / \mu$ 、 f は ($y = y_0$ と近似し) $a \equiv x_0^{3/2} / \sqrt{2GM}$ において

$$f(t) = \frac{m_1 \mu}{M} y_0 \frac{a}{(a^2 + t^2)^{3/2}}.$$

$t = -\infty \sim +\infty$ の間の振動系の energy の増大量は、固有振動に対応する外力（潮汐力）の Fourier 成分によって決まる次の量である、⁽⁴⁾

$$\Delta E = \frac{1}{2\mu} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

$f(t)$ を代入して次の結果を得る。ただし $K_1(z)$ は $z=0$ に特異点を持つ（従って z とともに急激に減少する）modified Bessel 関数。

$$\Delta E = 2\mu \left(\frac{m_1}{M} \right)^2 y_0^2 \omega^2 \{K_1(a\omega)\}^2.$$

さて多少乱暴ではあるが次のような読みかえをしてこの結果を星どうしの散乱に“翻訳”してみよう。振動系を半径 $r_* = \frac{1}{2} y_0$ 、質量 $m_* = \mu$ の星とみなし、これに質量 $m = m_1$ の星が近日点距離 $r_0 = x_0$ の放物軌道でもって encounter すると考える。このとき ω は星の自由落下率のオーダーの量となり $\omega = \omega_a \sqrt{2Gm_*/r_*^3}$ とおく (ω_a は normalize した振動数)。その結果 ($m = m_*$ とおいて)

$$\Delta E = \frac{Gm_*^2}{r_*} \{K_1(\omega_a \eta)\}^2, \quad (3)$$

ここに

$$\eta \equiv \sqrt{\frac{m_*}{m + m_*}} \left(\frac{r_0}{r_*} \right)^{\frac{3}{2}} \simeq \frac{\text{星の通過時間}}{\text{星の自由落下時間}}. \quad (4)$$

ところで系とプロセスを特徴づける量の次元解析から ΔE は一意的に次の形に定まる

$$\Delta E = \beta \cdot \frac{Gm_*^2}{r_*}. \quad (5)$$

β は η , ω_a , $\frac{m}{m_*}$ および星の内部構造に依存する無次元量であり、今の簡単なモデルの結論(3)では

(4) ランダウ・リフシッツ著、広重・水戸訳「力学」(1966), § 22, 東京図書。

$$\beta = \{K_l(\omega_0 \eta)\}^2, \quad (6)$$

つまり $\omega_0 \eta$ (= 近日点近傍での遭遇時間内に星が振動する回数) の急激な減少関数である。一般に β が η の減少関数でなければならないのは、潮汐力の性質から考えて当然である。

β の計算は $n=3$ の polytrope の gas 球というモデルについて PT が次のように行なった。 ρ を密度, $\delta \mathbf{v}$ を潮汐力ポテンシャル U で誘起された速度場の摂動とすると

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3 \mathbf{r} \rho \delta \mathbf{v} \cdot (-\nabla U) \\ &= (2\pi)^2 \sum_n |A_n(\omega_n)|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで

$$A_n(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \xi_n(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n t} (-\nabla U(\mathbf{r}, t)) dt \quad (8)$$

は星の固有振動数 ω_n に対応する潮汐力の Fourier 成分を、星の振動の固有関数 ξ_n で overlap integral したものである。質量 m_* , 半径 r_* の星と質量 m の質点とが近日点距離 r_0 の放物運動で encounter する場合、 β は(4)と同じ η を使って ($m = m_*$ として)

$$\beta = \sum_{l=2,3,\dots} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \eta} \right)^{\frac{4}{3}(l+1)} T_l(\eta). \quad (9)$$

$l=2$ は展開(1)の第3項 (四重極項), $l=3$ は第4項 (八重極項) ……に相当する。式(6)と違って ω_n が無いのは、星は動径・非動径方向に振動数 ω_n のことなる無数の“バネ”を内蔵している系なのでそれぞれの ω_n について和をとっているためである ((7)参照)。このことと overlap integral とが(9)の $T_l(\eta)$ を複雑な関数形にしている。overlap integral に寄与するのは node の少ない振動モード、つまり ω_n の小さい p-mode と ω_n の大きい g-mode, それに f-mode である (PT の Table 1 参照)。

星についての計算はこの一例だけであるが2, 3のコメントを加えておこう。一般に星の内部運動の energy 増大量は $\rho = \rho_0 + \delta \rho$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v}$ (ρ_0 ,

v_0 は 0 次の量, $\delta\rho$, δv は摂動量) として

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int dt \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot (-U) d^3 r \\ &= \int dt \int \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \cdot (-U) d^3 r + \int dt \int \delta \rho v_0 \cdot (-\nabla U) d^3 r \\ &\quad + \int dt \int \rho_0 \delta v \cdot (-\nabla U) d^3 r + (3 \text{ 次の項}) \end{aligned}$$

と書ける。星が stationary ($v_0=0$) かつ static ($\dot{\rho}_0=0$) な場合第 3 項のみが残りこれが PT の計算したものである。static だが stationary でない ($\dot{\rho}_0=0$, $v_0 \neq 0$, つまり平衡回転星) とき (上式第 2 項), 式(5)の β は更に星の自转角運動量 \mathbf{S} と encounter の軌道角運動量 \mathbf{L} とに依存することになるであろう。回転星の密度分布が 2 つのピークを持った場合の極限が二重星でありその二つの星の質量を m_1 , m_2 , 間隔を d とすると次元解析から

$$\Delta E = \beta_0 \frac{G m_1 m_2}{d}$$

と書け, β_0 の \mathbf{S} , \mathbf{L} への依存性は回転星の場合と類似したものであると思われる。従って回転星の場合も二重星のような超弾性散乱 ($\beta < 0$) があることが期待される。static でない星たとえば収縮 ($\dot{\rho}_0 > 0$) や膨張 ($\dot{\rho}_0 < 0$) の途上にある星 (前の式の第一項) の場合, ΔE の一般形はどんな形に書かれその係数 β は何に依存するのであろうか, 興味あるところである。やはずれが, 重力落下し内部で個々の星への分裂過程が進行中の原始星団についてある推測をしてみる。これら fragment どちらの encounter で fragment 内部に励起される振動の振動数 ω は k を波数, c を音速, ρ を密度として, $\omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho$ のようになるであろう。自己重力で分裂したばかりの fragment なので右辺の差は小さく, ω は非常に小さい ($\omega_a \ll 1$)。式(3)の K_1 が急激な減少関数であることを考えると β は普通の星の場合より極めて大きくなり得ることが期待される。⁽⁵⁾ この効果は重力落下しつつある星団全体から

(5) 普通の星の場合も ω_a の小さい ($\omega_a \rightarrow 0$) モードはあるがそれは ω_a の減少とともに mode の増す g-mode であるため β に寄与しない。今の場合逆の性質を持つ p-mode が可能な

の大きな kinetic energy 放出となり、その Virial 平衡半径は非常に小さくなり得る。つまりきわめて dense な星団や銀河中心核の（誕生時での）形成可能性の一論拠となるかもしれない。

PT の計算例 ($\dot{\rho}_0 = \dot{v}_0 = 0$ の場合) について 2 つのことを指摘しておく。一つは β は星の内部構造つまり密度分布、化学組成や状態方程式などにも依存すると思われるので、主系列星、赤色巨星、白色矮星、中性子星など星の種類によってもある程度の変動があると考えられることである。これに関する研究は未だ無いが β がどれだけ動き得るのか興味ある問題ではないだろうか。もう一つは、励起された振動は星の内部の粘性消散によって damp するであろうが damping の完了しないまま、或は脈動星のような自励機構を持つ星の場合、振動の継続したまま星と encounter を行なうことがあることである。PT で無視されたこの初期振動の効果の現われ方を見るには、初期振幅 $\neq 0$ として初期値問題として定式化しなければならない。定式化は Appendix A で行なっている。式(8)の A_n と初期振幅との干渉項が追加される (Appendix (A6)式参照) ことになるので、 ΔE ははじめの値より増すことも減ることもあるという (たぶん自明な) 結果になる。

§ 3. 星系における熱的不安定性の成長

前章の式(9)の応用の一例として多数個の星の集まった系 (以下星系と呼ぶ) の “thermal” な性質を調べよう。星どうしの非弾性散乱の影響は星系の random 運動エネルギーの減少すなわち冷却作用としてあらわれる。いま粒子の個数密度 $n(\mathbf{r}, t)$, random な速度の大きさ (速度分散) $u(\mathbf{r}, t)$ および ordered motion の速度 $v(\mathbf{r}, t)$ がそれぞれ場の量として確定できる流体があるとする。この流体の単位時間、単位質量あたりの冷却率を L とすると、流体は次の方程式系で記述される、

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$$

のである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{2}{3}\frac{1}{n}\nabla(n\epsilon) + \nu\nabla^2\mathbf{v} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\epsilon &= -\frac{2}{3}\epsilon(\nabla\mathbf{v}) + \frac{1}{n}\nabla(\kappa\nabla\epsilon) - L. \end{aligned} \right\} (10)$$

ここで $\epsilon \equiv \frac{1}{2}u^2$ 。 ν , κ はそれぞれ粘性係数, 熱伝導係数。星系に対するこのような流体近似の妥当性は章の最後で吟味する。

さて式(5)と(9)から星系の L を大まかに算定しておこう。⁽⁶⁾ 以下では星はすべて同じ質量 m_* であるとする。⁽⁷⁾ 星系の random 運動 energy の単位時間・単位体積あたりの冷却率を A , 加熱率を Γ とすると

$$L = (A - \Gamma) / (m_* n).$$

σ を非弾性散乱の断面積, w を衝突の相対速度とすると A は(5)(9)から次のようになる,

$$\begin{aligned} A &= \langle \Delta E \cdot \sigma \cdot n \cdot w \rangle n \\ &\simeq G^2 m_*^3 n^2 u^{-1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sum_{l=2,3,\dots} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \eta} \right)^{\frac{4}{3}(l+1)} T_l(\eta) \eta^{-\frac{1}{3}} d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで η_1 , η_2 はそれぞれ最小, 最大衝突径数に相当する(4)の η の値である。積分は η_2 にほとんどよらない。 η_1 は次の理由から u の関数となる。非弾性散乱が $\Delta E > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_* u^2$ のようなものであるとき2つの星は結合して二重星となる。二重星の結合エネルギー E_B が $\frac{1}{2} m_* u^2$ より小さいものを soft, 大きいものを hard な二重星と呼ぶ。二重星と単星との散乱について次の傾向があることが知られている。つまり二重星が soft なら結合がこわれて free な星に戻り, hard なら結合がますます強まってその結果単星は散乱前以上の運動 energy ($\simeq E_B$ のオーダー) を得て飛び去る(超弾

(6) 以下この章での計算はオーダーを主とするものであり, factor の違いは気にかけないことにする。

(7) 従って質量のちがいによる拡散(diffusion)の問題は生じない。しかし星系では逆に mass segregation が進行することは面白い。L. Spitzer, Astrophys. J. Lett. 158 (1969), L 139, が最初に指摘。

(8) 性散乱)。従って二重星形成前後の適当に長い時間を通して見た星系の net な energy 収支は大まかにいうと, soft 形成については loss (冷却), hard 形成については gain (加熱) となる。よって η_1 は soft 形成と hard 形成の境界に相当する値, つまり次の式

$$\Delta E(\eta_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_* u^2 + \frac{1}{2} m_* u^2$$

で決められる量でなければならない。(9) 以上の注意を行なった上で, 以下では冷却作用の効果の方に焦点をあてて見るという意図のもとに次の2つの近似をする; i) η_1 は hard な二重星形成まで含めた最小値 $\eta_1 \simeq 1$ (tidal disruption の限界, see PT) とする, ii) 二重星による加熱作用 Γ を無視する。(10) よって

$$L = \frac{A}{m_* n} = \alpha (G m_*)^2 n \epsilon^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

ここで α は $\eta_1 = 1$ とした(11)の積分でほぼ $\alpha \simeq 10^{-2}$ と概算される。

L の存在が (流体としての) 星系に与える興味ある現象として, 熱的不安定性によるゆらぎ成長の可否を調べよう。G. Field が与えた熱的不安定性の成長条件は次の三種ある(11)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right)_n &< 0 && \text{(thermal mode)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right)_{n\epsilon} = \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right)_n - \frac{n}{\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right)_\epsilon &< 0 && \text{(condensation mode)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right)_s = \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon} \right)_n + \frac{3}{2} \frac{n}{\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right)_\epsilon &< 0 && \text{(wave mode)}. \end{aligned} \right\} (13)$$

(8) これは衝突に際して3つの星が局所的に運動エネルギーを等分配しようとする傾向のあらわれである。A. P. Lightman and S. L. Shapiro, Rev. Mod. Phys. 50 (1978), 437.

(9) 三体衝突による二重星形成があるともっと細かく分けて考えねばならない。Ozernoy and Dokuchaev (前掲書) が詳細に扱っている。

(10) 星の半径を r_* , 二重星の separation を d とすると, 最も effective な非弾性散乱(σ_i) と超弾性散乱(σ_s) の断面積の比は $\sigma_i/\sigma_s \simeq r_*/d < 1$ (Ozernoy and Dokuchaev (前掲書)) だが, hard な二重星の個数の割合が小さければ加熱作用は無視できる。

(11) G. Field, Astrophys. J. 142 (1965), 531.

ここで S は **entropy** であるが式(10)と合うように比熱比 $\gamma=5/3$ の理想気体に関するものを使う。星系で興味があるのはまわりの“圧力”で圧縮されて密度ゆらぎが成長する **condensation mode** である。Appendix B の **normal mode analysis** からわかるように、この mode は波数 k が次の条件を満たせば成長する、

$$k < k_0 \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{u \sqrt{\tau_c \tau_E}}. \quad (14)$$

($k > k_0$ のゆらぎは冷却で成長する前に熱伝導で融けてしまう)。また成長時間 τ は

$$\tau \simeq \tau_c. \quad (15)$$

ここで τ_c は冷却時間、 τ_E は星系の **energy** 緩和時間⁽¹²⁾で、次の量で定義される (D_0 は星の平均間隔)、

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &\equiv \frac{\epsilon}{L} \\ \tau_E &\equiv \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{n^{-1} u^3}{(G m_*)^2 \ln \left[\frac{D_0 u^2}{2 m_*} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(以上 Appendix B 参照)。いま考えている星系の個数密度、速度分散および星の平均質量をそれぞれ次の単位で表わす

$$n_p [\text{個}/(\text{pc})^3], \quad u_k [\text{km}/\text{s}], \quad \mu [/\text{太陽質量}].$$

この単位を使って(16)は

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &\simeq 5.3 \times 10^{12} \mu^{-2} n_p^{-1} u_k^3 [\text{年}] \\ \tau_E &\simeq 3.2 \times 10^9 \mu^{-2} n_p^{-1} u_k^3 [\text{年}]. \end{aligned} \right\} \quad (16)'$$

ただし τ_E の対数項の変動は小さいので定数 (=1) とおいた。また波数 k をその中に含まれる星の個数 $N (\simeq n k^{-3})$ でおきかえると、成長条件(14)は次のようになる

$$N > N_0 \equiv 3.5 \times 10^{15} \mu^{-6} n_p^{-2} u_k^{12} [\text{個}]. \quad (14)'$$

(12) S. Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics (1942), Dover Publications Inc. New York, の式 (2-379)。

この条件を満たせば密度ゆらぎが成長するのだが、出発点の式(10)からわかるようにゆらぎの自己重力の効果を無視した上で話である。これは正当ではない。何故なら星系の自由落下時間を $\tau_f (\simeq 1/\sqrt{Gm_*n})$ とすると Jeans 波長 $\lambda_J (\simeq u\tau_f)$ の中に含まれる個数 N_J は

$$N_J \simeq n(\lambda_J)^3 \simeq 3.5 \times 10^3 \mu^{-\frac{3}{2}} n_p^{-\frac{1}{2}} u_k^3 \quad [\text{個}]$$

$$< N_0$$

となり、成長可能な熱不安定ゆらぎはすべて重力的にも不安定だからである。⁽¹³⁾そこで次の2つの cases に分けて考えよう：

case I (II) ; $\tau_c > \tau_f$ ($\tau_c < \tau_f$) のとき

i.e. $u_k > (u_k <) 1.4 \times 10^{-2} \mu^{\frac{1}{2}} n_p^{\frac{1}{6}}$ のとき.

まず case I については重力が支配要因だから球状星団などのように、Virial 平衡に達したあとの静的な系においてのみ L の作用が表面化する。熱的不

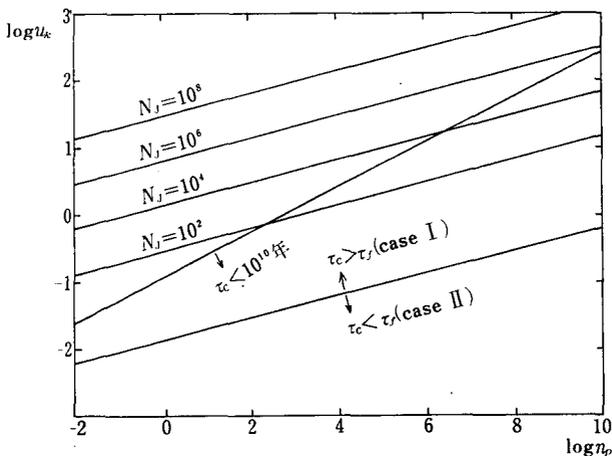


図 1

(13) この点、星系は gas 系の場合と大きく異なっているが、これは星系の平均自由行程が大きいためである。言葉をかえれば星系においては系を冷却させるための collision も系の収縮も同じ重力の働きによるが、遠距離力なので後者の方が勝つのである。なお gas 系の場合の熱的不安定性については拙稿、T. Sato, Progress of Theor. Phys. 52. (1974), 1174, などを参照。

安定ゆらぎ成長の最小個数 N_0 は常に Virial 平衡系の中の総個数 (N_J に等しい) より大きいから、この系内で熱的不安定ゆらぎが成長することは無い。 L は系全体の準静的な冷却をうながすという形で系の進化に参与する。この作用は緩慢とはいえ球状星団や銀河中心核などにおける高密度 core の形成、ひいては巨大 Black Hole の形成に通じる主要な process のにない手となるであろう (§5)。次に case II の場合、系は重力的に不安定であっても熱的变化の方が速いので熱的不安定ゆらぎの成長は十分可能である。図 1 にこの領域を示してある。これからわかるように case II は高密度・低速度分散の領域であり、現在観測されている典型的な星系からは大きくはずれている。しかし例えば銀河形成時の collapse で星が大量に出来たときなど速度分散がまだ十分に発達してないとすれば、このような条件が実現されたかもしれない。現実の天体現象との関連については推測の域を出ないが、いずれにせよ星系において重力以外の機構によって (潮汐力による冷却作用だからもとはと言えば重力なのだが)、ゆらぎ成長が可能であることは興味深いことである。

最後にこれまでの議論の前提であった、星系に式(10)を適用することの妥当性について検討する。 $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$ を μ -空間における一体分布関数として、kinetic theory の出発点は次の Boltzmann 方程式である

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}} \quad (17)$$

周知のように巨視的方程式(10)はこの (\mathbf{w} に関する) 0 次, 1 次, 2 次のモメント方程式を構成することによって得られる。⁽¹⁵⁾ 一方球状星団などの典型的な星系においては星の平均自由行程は極めて大きい (系の直径よりはるかに大きい) ので、(17)の右辺の衝突項は無視してよい (無衝突 Boltzmann 方

(14) この時期の緩和機構は violent relaxation によるとされる。D. Lynden-Bell, Mon. Not. R. A. S. **136** (1967), 101.

(15) S. Chapman and T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (1939), Cambridge Univ. Press.

(16) 程式)。従ってこれまでの議論は i) 衝突項の効果が十分効いていること、ii) 考えている現象が巨視的な量 n , u , v を各場所・各時間ごとに十分よく定義し得るだけの空間的・時間的ひろがりを持っていること、の2つが満たされれば通用する。衝突項の効果は(16)の energy 緩和時間 τ_E , 又は平均自由行程 $l_f \equiv u\tau_E$ を用いて評価される。上の2つの条件は熱的不安定成長のための最小波長 $2\pi/k_0$ が

$$2\pi k_0^{-1} \gg l_f \quad (18)$$

であること、および成長時間(15)が

$$\tau_c \gg \tau_E \quad (19)$$

となっていれば満たされている。式(16)'から

$$\frac{\tau_c}{\tau_E} \simeq 1.7 \times 10^3 \stackrel{(17)}{\gg} 1,$$

また(14)から

$$\frac{2\pi k_0^{-1}}{l_f} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\tau_c}{\tau_E} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 2.1 \times 10^2 \gg 1,$$

よって(18)(19)は十分満たされている。よって議論は妥当であると考えてよい。

§4. hierarchical な星の系における非弾性散乱

Virial 平衡をしている星の集団をこの章では星団と呼ぶことにする。そういう星団が多数あつまってもう一つ上位の階層の系(それは Virial 平衡しているかどうかは必ずしも言えない)を作っているとすると、各星団はこの系にとって独立した構成要素である。いま一つの星団(質量 M , 半径 R)が他の星団(便宜上質量 M' の質点と見なす)と encounter して内部運動の energy が ΔE だけ増したとすると(5)と同様、一般に

(16) ふつう呼ばれる Vlasov 方程式という名称は正しくないという主張がある。M. Hénon, *Astron. and Astrophys.* 114 (1982), 211.

$$\Delta E = \gamma \frac{GM^2}{R} \quad (20)$$

と書ける。 γ を定める諸因子は §2 の β の場合と同様(4)の η に相当するもの、 M'/M , 星団の内部構造に関する量などであろう。

γ に相当する量の算出はこれまで N 体 simulation の手法によっていくつかなされて来ている。その一例を見よう。いま2つの銀河1, 2の質量を M_1, M_2 , 半径を R_1, R_2 , また質量分布を球対称 polytrope としてその index を n_1, n_2 とする。銀河1が2に対し衝突径数 R_0 , 速度 V_0 の直線的 encounter をするとき、銀河2の内部 energy 増大量 ΔE_2 は, Alladin et al. (1974)⁽¹⁸⁾ によると

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} \frac{G^2 M_1^2 M_2}{V_0^2 R_2^2} \cdot J\left(\frac{R_1}{R_2}, \frac{R_0}{R_2}, n_1, n_2\right).$$

ここで J は numerical に計算され、 $R_0 \geq R_1 + R_2$ のとき $J \propto (R_2/R_0)^4$ 。 J のこの依存性は galactic cluster と星間 gas との衝突を扱った Spitzer (1958)⁽¹⁹⁾ の結果とも一致する。このとき $R_1 = R_2 = R$, $M_1 = M_2 = M$ とおき $V_0^2 = 2GM/R_0$ とすると、(4)の η を使って(20)の γ は (f をある関数として) 次の形になる、

$$\gamma = \frac{1}{\eta^3} f(n_1, n_2).$$

§2 の例で ΔE は、系の固有振動をその振動数に対応する潮汐力の Fourier 成分が励起することによって生じる、という理解を行なった。この物理的にスッキリしたアプローチを行なうためには、星団の固有振動数と分布関数のゆらぎ $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$ に関する固有関数の組とを求めなければならない。

(17) この比は単位時間内の散乱による星の重心運動と内部運動の energy 平均変化量の比に相当する。これはまた遭遇時間の間に本文(1)の第2項の力と第3項の力のなす仕事の比と見てもよい。ただし後者が近距離 encounter なのに対し前者は遠距離 encounter が主要で従って多数の星が同時に散乱源として関与している点に注意する。

(18) S. M. Alladin, A. Potdar and K. S. Sastry, I. A. U. Symposium No. 69 (1974), p. 167, Ed. by A. Hayli.

(19) L. Spitzer, *Astrophys. J.* **127** (1958), 17.

これが計算されているのは少数の特殊な case についてのみである。⁽²⁰⁾ この方向からの ΔE の計算のためには星団の固有振動についての研究が進む必要があるだろう。⁽²¹⁾ PT 流の計算のための障害は星団において平均自由行程が大きすぎるためであるが、このことは別のアプローチからは利点となっている。つまり星団の中の各星は互いに独立に共通の力の中心のまわりを回っていると見ることができるので、外からの潮汐力の作用は各星の軌道運動をとりあえず独立に変化させると考えてよい。⁽²²⁾ この事情は N 体数値計算にあたって問題を簡略化する手がかりとなるが、一方これを最大限に生かしたわかり易い解析的なアプローチはないものであろうか。

さて § 2 の場合も含めて、本稿で述べて来た散乱とは 2 つの天体の半径を R_1 , R_2 とするとき近日点での両者の重心間距離 R が $R > R_1 + R_2$ であるようなものを、暗黙に前提としていた。この“おとなしい” encounter の場合、外を通過する質点（の潮汐力）の作用に対する系の内部自由度の応答という picture は妥当であり、⁽²³⁾ (5) や (20) の表式はそれを前提としている。本稿でたち入る余裕はないが $R \leq R_1 + R_2$ の“はげしい” encounter については、星どうしの direct collision, 二重星と単星との衝突における exchange 現象、銀河どうしの合体など個々の case に応じた詳細な検討が必要である。⁽²⁴⁾ 銀河どうしの合体の研究は最近盛んであり合体の“cross section”など素過

(20) たとえば、一様一次元星系の垂直方向振動について、A. J. Kalnajs, *Astrophys. J.* **180**, (1973), 1023. 一様一次元星系について、S. Goldstein, *in Gravitational N-Body Problem* (1970), p. 184, Ed. by M. Lecar (D. Reidel Publishing Company). 球対称星系について固有振動数のみ、G. Severne and A. Kuzzell, *Astrophys. and Space Science* **32** (1975), 447.

(21) 固有振動が pulsation として観測にかかる星の場合とちがって、星団の場合はそういう研究の直接の動機がない。

(22) 各星の軌道運動を系全体にわたって速度分散として平均化した場合の ΔE が、encounter の相手の物体に対する dynamical friction (drag force) の効果に相当する。See S. Chandrasekhar, 前掲書。

(23) ただし内部構造不変のまま振動等のモードが励起されるのみ、ということではない。星の軌道が circular より radial に近い星系の場合、encounter によって系の密度分布（光度分布）など内部構造そのものが変わり得る。G. E. Miller, *Astrophys. J.* **268**, (1983) 495 参照。

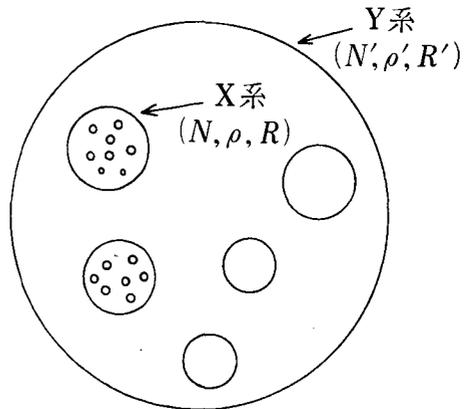
程の（計算機実験による）empirical rules が今後ますます確立されて行くものと思われる。しかしここでも、銀河間 potential を soft なものに変更する等の修正があるとは言え潮汐力による（相互の）内部自由度励起というカテゴリーは不変であることを注意しておこう。

さて星団どうしの非弾性散乱による(20)の γ が求められた場合、§ 2 と全く同様にこんどは星団を構成要素としそれが N 個あつまった“系”（その速度分散を u とする）の冷却率 L が計算でき、冷却時間を $\tau_c \approx \frac{1}{2} u^2 / L$ とし定義できる。この“系”が Virial 平衡系であるとき τ_c は次のように書ける

$$\tau_c \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{G\rho}} N \quad (21)$$

ただし ρ は“系”の平均密度、また L は(12)と同じ形であるとした（系に特有の α の値はここでは未知）。

ここで図のように単純化した hierarchical な系を考える。つまり N 個の構成単位（一個の質量 m ）から成る Virial 平衡系の平均密度を ρ 、半径を R とする（X 系と呼ぶ）。この X 系を 1 単位としたものが N' 個あつまって平均密度 $\rho' (< \rho)$ 、半径 $R' (> R)$ の Virial 平衡系を作



っている（Y 系と呼ぶ）。X 系の冷却時間 τ_c は(21)で、Y 系の冷却時間 τ_c' は

(24) Review としては、S. Tremaine, in *The Structure and Evolution of Normal Galaxies*, (1980) Ed. by S. M. Fall and D. Lynden-Bell (Cambridge Univ. Press), p. 67. および、S. D. M. White, in *I. A. U. Symposium No. 100* (1983), Ed. by E. Athanassoula (D. Reidel Publishing Company).

$$\tau_c' \simeq \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{\sqrt{G\rho'}} N' \quad (22)$$

で与えられる。2個の X 系どうしの非弾性散乱の効果は Y 系にとっては冷却作用であるが個々の X 系にとっては (適当な relaxation process を経た⁽²⁵⁾) 加熱作用として作用する。一個の X 系の加熱時間を τ_h とすると

$$\frac{G(Nm)^2/R}{\tau_h} \simeq \frac{1}{N'} \cdot \frac{G(N'Nm)^2/R'}{\tau_c'}$$

これらから ($N'\rho R^3 = \rho'R'^3$ を考慮して)

$$\frac{\tau_c}{\tau_h} \simeq \frac{\alpha'}{\alpha} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{N}{N'} \cdot N'^{\frac{2}{3}}$$

従って同じ非弾性散乱の効果でありながら、 $\tau_c < \tau_h$ か $\tau_c > \tau_h$ かによって X 系は energy loss とも energy gain ともなり得る。X, Y 系をそれぞれ典型的な銀河、銀河集団としたとき (仮に $\alpha' \simeq \alpha$ として) $\tau_c > \tau_h$ 、よってクラスター中の銀河は“温められ”膨張の方向に向かうということになる。⁽²⁶⁾ 星団を hierarchical な構造の中で考えるとき L の作用の持つこの二重性に注意する必要がある。

最後に星団の構成要素の総数 N についてであるが、原理的には $N=2$ (二重星) から任意の個数までのものが考え得る。その中で $N \simeq 100$ まででの比較的少数体の Virial 平衡系は平均自由行程が系の大きさよりも小さい。このことが N のより大きな系の場合と比べて (20) の γ に、⁽²⁷⁾ あるいはこの星団を構成要素とする系の L の係数 α にどう反映されるか、興味を持たれる。上の例で総数 NN' 個の単位を N 個 (X 系) \times N' 個 (Y 系) と分けたのであるが、Y 系の冷却 (それは X 系の加熱にからむ) にとってどういう分け

(25) たとえば X 系内に波動が励起されそれが Landau damping を通じて個々の“星”の運動となる。Severne and Kuzzell (前掲) によるとこの damping は数回の振動時間内に起こる。

(26) 現在の銀河は (球状) 星団を構成要素としている訳ではない。これは、X 系を (球状) 星団、Y 系を銀河とした同じ論法によって前者が融けてしまったためという想像も出来る。

(27) D. N. C. Lin and S. Tremaine, Astrophys. J. 264 (1983), 364. によると、小さな平均自由行程すなわち大きな relaxation 効果は系の“viscosity”の増大に通じる。

方が最大効率となるのか等は、上の（未解決の）問題の応用となるだろう。

§5. お わ り に

課題として興味があるのは、式(5)の β や(20)の γ が(式(4)の η の他に)散乱に関与する天体の質量、半径、内部構造、内部運動(回転など)、構成要素の個数等にどう依存するのかを解明することである。このことはそのギロンの有効性の範囲とともに§2, §4で述べてあるので重複はさげよう。これまで触れなかった注意点をここでは一つだけ追加する。それは二体散乱において一方を質点と考えたことからわかるように非線型効果は無視する範囲内での話に限って来たことである。散乱しあう双方の天体(AとBとする)は互いに内部運動を励起しあう。AがBから受ける潮汐力はBを質点と見たときのものに加えて、励起の結果ゆがんだBの効果が加算される。互いが **close encounter** をする場合この効果は無視できなくなり、 β や γ を大きく変更することになるかもしれない。

最後に以下の指摘をしておきたい。宇宙論・天体物理学の大きなテーマは、現在の宇宙の姿をそれが宇宙膨張の途上で“凍結”した時点にまで逆のぼって根拠づけようとするのであろう。ヘリウムの起源や 2.7 K 黒体 **background** 輻射の起源、さらには大統一理論(GUT)による弱・電磁・強の3つの基本相互作用の分化など、この方面の研究は進展著しいものがある。一方現在の宇宙を出発点とした未来宇宙論は別の方向の大きなテーマと言えるが、これはそれほど意欲的な研究対象とはなっていない。変化の **time scale** が大きすぎ、この方面での科学的予測が人類の体験にもとづく“反証可能”(K. ポパー)な言明と言えるか確信が持てないためであろうか。しかし現在の理論をそのまま外挿した先にどんな未来像が描かれるのか投映してみることは自然認識の正当な一翼をになった仕事であると考えたい。この未来像は物理学の進歩とともに次々と革新されるべきものであり、ちなみに最

近のそれは Black Hole 物理学および GUT によってぬりかえられている。たとえば hierarchical な恒星集団は次々と大小さまざまな Black Holes になり次にそれら B.H. については Hawking process ⁽²⁸⁾ により蒸発してしまう……。このときさまざまな階層の恒星系が遂には Black Holes へと collapse してしまうのか否か（その割合はどうか）はその過程の詳細を追跡して結論されることであり、恒星系の N 体問題のより深い検討が必要である。その際、本稿でのべたような視点が具体化されるならば、有益な道具となるであろう。

Appendix A——初期値問題としての定式化——

初期値問題としての性格を明確にするために $t=0$ での変位場 $\xi(\mathbf{r}, 0)$ と速度場 $\dot{\xi}(\mathbf{r}, 0)$ が与えられかつ $t < 0$ で $U(\mathbf{r}, t) = 0$ とする。

固有振動の振動数 ω_n と固有関数 $\xi_n(\mathbf{r})$ はある線型演算子 \hat{L} (3×3 行列演算子) に対し

$$(-\rho\omega_n^2 + \hat{L})\xi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A1})$$

を満たし、 \hat{L} は次の性質を持つ

$$\int \xi_m^t(\mathbf{r}) \hat{L} \xi_n(\mathbf{r}) d^3r = \int \xi_n^t(\mathbf{r}) \hat{L} \xi_m(\mathbf{r}) d^3r.$$

このとき固有関数は次の直交条件をみたす

$$\int \rho(\mathbf{r}) \xi_m^t(\mathbf{r}) \xi_n(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{mn}. \quad (\text{A2})$$

潮汐力ポテンシャル U が加わったときの変位場の満たす式は

$$\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{L}\right)\xi(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A3})$$

ξ と $-\nabla U$ を固有関数展開する：

(28) たとえば超銀河集団が B.H. になるのに 10^{18-27} 年、その B.H. が蒸発するのに 10^{100} 年かかる。また B.H. にならなかった白色矮星や中性子星でさえトンネル効果で約 10^m ($m=10^{76}$) 年たてば B.H. になるという。以上、一般向きであるが、J.N. Islam, The Ultimate fate of the Univers (1983), Cambridge Univ. Press を参照。

$$\left. \begin{aligned} \xi(\mathbf{r}, t) &= \sum_n B_n(t) \xi_n(\mathbf{r}) \\ -\nabla U(\mathbf{r}, t) &= \sum_n C_n(t) \xi_n(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A4})$$

これを(A3)に代入し(A1)と(A2)を用いて次式を得る

$$\frac{d^2 B_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 B_n(t) = C_n(t) \quad (\text{A5})$$

(ここまで PT の formulation と記法を用いた)。Laplace 変換

$$\bar{C}_n(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} C_n(t) dt$$

$$\bar{B}_n(p) \equiv \int_0^\infty e^{-pt} B_n(t) dt$$

を定義し(A5)に $\int dt e^{-pt}$ を作用すると

$$\begin{aligned} p^2 \bar{B}_n(p) - p B_n(0) - \dot{B}_n(0) - \omega_n^2 \bar{B}_n(p) &= \bar{C}_n(p) \\ \therefore \bar{B}_n(p) &= \frac{\bar{C}_n(p) + p B_n(0) + \dot{B}_n(0)}{p^2 + \omega_n^2}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

内部 energy 増大量

$$\Delta E = \int_0^\infty dt \int d^3 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} (-\nabla U(\mathbf{r}, t))$$

に(A4)を代入し(A2)を使うと

$$\Delta E = \sum_n \int_0^\infty C_n(t) \dot{B}_n(t) dt.$$

Laplace 逆変換

$$C_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \bar{C}_n(p) dp$$

$$B_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} e^{pt} \bar{B}_n(p) dp$$

(c, c' はそれぞれの収束軸) を使って

$$\Delta E = \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p \bar{C}_n(p) \bar{B}_n(p) dp.$$

これに(A5)を代入し $\bar{C}_n^*(i\omega) = \bar{C}_n(-i\omega)$ に注意して

$$\Delta E = \sum_n [|\bar{C}_n(-i\omega_n)|^2 - \omega_n B_n(0) \mathcal{I}_m \bar{C}_n(-i\omega_n) + \dot{B}_n(0)_e \mathcal{R} \bar{C}_n(-i\omega_n)]$$

ここに

$$\begin{aligned} \bar{C}_n(-i\omega_n) &= \int_0^\infty e^{i\omega_n t} C_n(t) dt \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \xi_n(\mathbf{r}) \int_0^\infty dt e^{i\omega_n t} (-\nabla U(\mathbf{r}, t)). \end{aligned}$$

$t < 0$ で $U=0$ だから本文の $A_n(\omega_n)$ を使って

$$\bar{C}_n(-i\omega_n) = 2\pi A_n(\omega_n).$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^2 \sum_n |A_n(\omega_n)|^2 \\ &\quad + 2\pi \sum_n \mathcal{R}_e [A_n(\omega_n) \{ \dot{B}_n(0) + i\omega_n B_n(0) \}]. \end{aligned} \tag{A6}$$

ここで $B_n(0)$, $\dot{B}_n(0)$ は初期値 $\xi(\mathbf{r}, 0)$, $\dot{\xi}(\mathbf{r}, 0)$ に関する次のような overlap integral ((A2)(A4)から)

$$\begin{cases} B_n(0) \equiv \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \xi_n(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}, 0) \\ \dot{B}_n(0) \equiv \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \xi_n(\mathbf{r}) \dot{\xi}(\mathbf{r}, 0). \end{cases}$$

$t \geq 0$ に制限した点で PT の formulation と異なるが、初期変位 $B_n(0)$ と初期速度 $\dot{B}_n(0)$ が潮汐力の Fourier 成分 $A_n(\omega_n)$ との干渉項を作り、これがもとの値(7)に追加されていることがわかる。

Appendix B—熱的不安定ゆらぎの normal mode analysis—

0 次の量を n , v , ϵ で、ゆらぎの量を δn , δv , $\delta \epsilon$ で表わし、0 次媒質は一律で静的であると仮定する。今の場合 $L \neq 0$ だから ϵ 等の時間変化がありこの仮定は妥当でない。正しくは 0 次に対するゆらぎの相対的成長つまり $\delta n/n$, $\delta \epsilon/\epsilon$ 等の成長可能性を調べねばならない。従ってこの仮定の下での成長可能という結論には、いくらか overestimation が含まれている。

本文の式(10)において粘性項を無視し熱伝導の効果の方を残しておく。熱伝導係数は次の量で与えられる (τ_E は energy 緩和時間, l_f は平均自由行程 $=u\tau_E$)

$$\kappa \simeq n \cdot u \cdot l_f = nu^2\tau_E.$$

ゆらぎが次の形に比例するとし

$$\delta n, \delta v, \delta \epsilon \propto \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$$

さらに $\omega = \Omega + i\gamma$ とおく (Ω, γ は実数)。これらを(10)に代入して次の分散関係式が得られる：

$$\Omega \neq 0 \text{ のとき； } \gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \quad (\text{B1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)' \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)_n + k^2 u^2 \tau_E \\ b \equiv \frac{1}{4} \left[\frac{10}{9} k^2 \epsilon + \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)' \right\}^2 \right] \\ c \equiv \frac{1}{18} k^2 \epsilon \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)' + \frac{3}{2} \frac{n}{\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial n}\right)_\epsilon \right\} \end{array} \right.$$

$$\Omega = 0 \text{ のとき； } \gamma^3 + a_0\gamma^2 + b_0\gamma + c_0 = 0 \quad (\text{B2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)' \\ b_0 \equiv \frac{10}{9} k^2 \epsilon \\ c_0 \equiv \frac{2}{3} k^2 \epsilon \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \epsilon}\right)' - \frac{n}{\epsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial n}\right)_\epsilon \right\}. \end{array} \right.$$

これら3次方程式の正根 γ の存在が不安定モードの成長を意味する。 $(\partial L/\partial \epsilon)'$ は $(\partial L/\partial \epsilon)_n$ が熱伝導項のために modify されたものと考え、本文(13)の成長条件との対応関係がわかる。係数の比較から(B1)は $c < 0$ のとき正根を持ち、これは(13)の wave mode に対応する。名のとおり音波の growing wave のようなものである。(B2)が正根を持つのは $a_0 < 0$ 又は $c_0 < 0$ のときでありそれぞれ(10)の thermal mode, condensation mode に相当する。式(12)の L

$$L = \alpha (Gm_*)^2 n \epsilon^{-\frac{1}{2}}$$

を代入すると常に $c > 0$ かつ $a_0 < 0$ である。よって thermal mode は成長し wave mode は成長しない。また $c_0 < 0$ となるのは次の場合である：

$$k^2 < \frac{3}{2} \frac{L}{\epsilon} \frac{1}{u^2 \tau_E} = \frac{3}{2} \frac{1}{u^2 \tau_c \tau_E}$$

($\tau_c \equiv \epsilon/L$)。よって condensation mode の成長条件(14)が得られる。純粹の condensation mode ($a_0 > 0$, $c_0 < 0$) の成長時間 $\tau \left(\equiv \frac{1}{\gamma} \right)$ は (B2) から大まかに

$$\tau \approx \begin{cases} \tau_c & : \quad \frac{1}{u \tau_c} < k < k_0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{k u} & : \quad k < \frac{1}{u \tau_c} \text{ のとき} \end{cases}$$

と計算される。しかし thermal mode と共存している ($a_0 < 0$, $c_0 < 0$) ことを考え、まとめて

$$\tau \approx \tau_c$$

としてよい。