Energy Loss Rate of Electron Gas in the Cosmic Background Radiation

宇宙背景輻射の中の電子ガスのエネルギー損失率

佐藤　通

§1　はじめに

宇宙背景輻射（Cosmic Background Radiation ; CBR と略称）にはしばしば形容的に "fossil"（化石）という文字が付される。事実，CBR は太古の宇宙の情報をわれわれに伝える貴重な化石である。この場合の "太古" とは赤方偏移が $z \sim 1000$ の時期，宇宙温度が約3000度まで冷えてイオンがいっせいに再結合（中性化）した時期にあたる。イオンの中性化によって物質と光の相互作用（吸収・散乱）の効率は激減するので，それ以降，宇宙空間は光に対して基本的に透明になる。これを比喩的に宇宙の「晴れ上がり」と呼ぶ。それまで物質と熱的に平衡していた光が，晴れ上がり時期の情報を保持しつつ，ほぼ無傷[(1)]でわれわれに届き，現在 "fossil" CBR として観測される。数年前，探査衛星 "COBE" がこの時期の物質のゆらぎの空間的スケールと振幅に関する重要な知見をもたらしたことは記憶に新しい。

だが CBR は化石（情報のメッセンジャー）であるだけでなく，晴れ上がり後の宇宙において物質にさまざまな熱的・力学的作用を及ぼす "現役" の働き手でもある。われわれの宇宙において CBR と物質の熱容量の比は非常

（1）ただし宇宙が（$z \sim 5$ の時期までに）「再電離」したとする説は，再電離したガスとの相互作用のために CBR が晴れ上がり期の情報の一部（ゆらぎのスペクトルなど）を失っていると主張する。この問題は構造形成の初期条件を定める上でも重要であるが，議論は進行中である。

に大きな値（$\sim10^9$）である[2]。このため CBR は，第一に，物質の熱エネルギー（温度）をコントロールする巨大な“熱浴”として機能する。これは以前から，局所的に高温になった電離ガスに対する「コンプトン冷却」作用として知られている。第二に，電離ガスの巨視的運動は CBR によって散逸させられるので，CBR は物質の運動にとって強い抵抗媒質として機能する。物質は CBR という“粘っこい”媒質の中に浸っている。これに関して最近，次のような研究がなされた。遠方の活動銀河の中心に巨大ブラックホール（太陽質量の約10^8倍）があるらしいことが観測的に有力になっている。ブラックホールが初期段階に（遠方とは初期を意味する）ここまで巨大化するためには周囲からガスを効率よく供給しなければならない。だが周囲のガスは回転の角運動量を持つのでブラックホールへの落下が著しく妨げられる。梅本たちは，回転するガスが等方な CBR から抵抗力（Compton drag）を受けて角運動量を失うことを考慮すると，この落下が可能であることを数値計算で示した[3]。

CBR が持つこういう“力学的”能力は，晴れ上がり後の「構造形成」の諸問題との関連で，もっと注目されてもよい。例えば，構造形成はガスの重力的落下運動を中心とする物質の巨視的運動だが，これに関与する CBR の力学的側面は等閑視されていないだろうか。

ガスの運動に対する CBR の“阻止能”（stopping power）は輻射と荷電粒子（電子）とのエネルギー交換に由来する。このエネルギー交換率は従来から「コンプトン冷却率」として知られており，上記の梅本たちの論文もこの表式を利用して“Compton drag”の大きさを評価している。この表式は電子ガスを非相対論的とした扱いである。多くの場合はそれで十分だが，C

（2）だから CBR が物質から受ける熱的反作用は10^{-9}倍に薄められ，CBR にほとんど痕跡を残さない。このため CBR が無傷に近い化石であることと（晴れ上がり後に）物質に作用を及ぼし得ることとが両立する。
（3）Umemura, M. and Fukue, J., Publ. Astron. Soc. Japan, 1994, **46**, 567.／Umemura, M., et al., 1993, Astrophys.J. **419**, 468.

BＲの役割を幅広い局面で検討したいときは，この制限なしに適用できるなるべく一般的なエネルギー交換率の表式が望まれる。(4)

本稿は，その表式を得るために“大昔”の「クライン・仁科の式」(1929年）から出発して黒体輻射の中での電子ガスのエネルギー・ロス率を計算した結果の報告である。いろんな場合に適用できるように，最終結果を可変パラメータ（CBR 温度と電子ガス速度または温度）で explicit に表示することを目標にした。そのため途中から近似計算に移ることを余儀なくされたが，誤差の評価（→ Appendix D）を通じて，近似は良好であるとの感触を持っている。基礎課程（光子と電子とのコンプトン散乱）は分かっているので，この論文の実質的内容は積分の実行である。§2で初等的な素描を行い，§3で問題を定式化し，§4で積分を実行する。枚数制限の都合上，最終結果を表示した所で記述を終わることにし，得られた結果に関する議論や数値例は省略した。なお，計算の詳細はその主なものだけを末尾の Appendix A～E に示した。

§2　簡単な導出

電子がコンプトン過程で運動エネルギーを失うタイムスケールは，次のような初等的な素描からでも概算することができる。

エネルギー密度 U の等方な黒体輻射場（光子の集まり）がある。光子1個あたりの平均エネルギーを ε とおくと光子1個あたりの平均運動量は ε / c である（c は光速度)。その中にある1個の電子を考える。電子が静止していれば，これらの光子が平均的に等方にやってきて「トムソン散乱」の断面積 σ_T で衝突し，再び平均的に等方に跳ね返される。電子は衝突のたびに光子に“こずき回されて”ランダムに運動するが，長時間平均すればその位

---

(4) 相対論的な電子ガスの場合については，例えば Guilbert, P.W, and Fabian, A.C., 1986, Mon. Not. R.astr. Soc. **220**, 439. が扱っている。本稿と比べるとこれは主要な1項だけを取り出した近似に相当する。

置は“静止”したままである。

電子がある向きに速度vで運動しているとする。$\beta = v/c$とおいて，上の描像に対する変更をβの１次の効果（非相対論的）まで考慮する。電子の静止系から見ると「ドプラー効果」のために輻射場は非等方になり，光子の平均運動量は，電子の運動方向では（$1+\beta$）倍，運動の反対方向では（$1-\beta$）倍になる。その差をとると，静止した電子に平均運動量$2\beta\varepsilon/c$の光子が衝突してくるのと同じである。ここで粗く，衝突後の光子が衝突前と正反対の方向（散乱角180度）に同じ運動量で跳ね飛ばされると近似すると[(5)]，電子が光子からもらう反跳運動量は$4\beta\varepsilon/c$である。衝突断面積はトムソン散乱のそれσ_Tとしてよい。光子の速度はc，光子の平均個数密度はU/εだから（個数密度の変更はβ^2のオーダーなのでこれを無視する），１個の電子が単位時間あたりに輻射場から受ける反跳運動量は，

$$(4\beta\varepsilon/c)\cdot\sigma_T\cdot c\cdot(U/\varepsilon)=4\beta\sigma_T U\equiv\mu v$$

である。ただし，$\mu=4\sigma_T U/c$である。この反跳運動量の値はもとの座標系に移しても同じである（変更は２次のオーダー）。これは電子（の運動の反対方向）に働く抵抗力に他ならない。すると，電子の運動を古典的に考えて，その運動方程式は

$$m_e\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\mu v$$

であり（m_eは電子質量），その解

$$v=v_0\cdot\exp[-(\mu/m_e)t]$$

から，電子が運動エネルギーを失うタイムスケールは

$$\tau=m_e/\mu=m_e c/(4\sigma_T U)$$

となる。係数部分（“1/4”）を除けば，この表式は第ゼロ近似として正し

（5）電子の静止系（実験室系）で，光子の衝突前後の運動量を$\vec{k}$, $\vec{k}'$とし，光子の散乱角をθとすると，エネルギー・運動量保存則から（$\hbar=c=1$の単位で）

$$k'=k/[1+(k/m_e)(1-\cos\theta)]$$

輻射場が超高温でないかぎり$k/m_e\ll 1$だから，散乱角θの値によらずほぼ$k'=k$である。つまり，電子静止系で見て，光子の運動量は衝突前後でほぼ等しい。

い。上のような簡単な考察からこれが得られることはちょっとした驚きである。もちろん電子が相対論的になるとこの単純化は無効になる。

§3　問題の定式化

（i）単位系と座標系

本稿では物理量の単位は“相対論単位”つまり$\hbar = c = 1$であるような単位系をとる（$\hbar$はプランク定数hを2πで割ったもの，cは光速度）。また空間に固定した座標系をここでは“基準系”と仮称し[6]，以下で特に断らない場合は座標系は基準系である。

素過程は1個の電子と1個の光子との衝突である。衝突前の電子と光子の運動量ベクトルをそれぞれ$\vec{p}$, $\vec{k}$とする[7]。あるいは4元運動量ベクトルの形式でそれぞれを，

$$p^{(4)} = (E,\ \vec{p}), \qquad k^{(4)} = (k,\ \vec{k})$$

と書く。それぞれの第1成分E, kは電子と光子のエネルギーであり，これらはその運動量と次のように関係している；

$$E = (p^2 + m^2)^{1/2} = m\gamma, \qquad k = |\vec{k}|$$

ただしmは電子質量であり，ローレンツ因子γは（衝突前の）電子の速度ベクトル$\vec{u}$の大きさをu（<1）として，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\geqq 1)$$

である[8]。なお以降では随所で（衝突前の）kの代わりに，次で定義される無次元パラメータqを使う。

$$q \equiv k/(m\gamma)$$

（6）膨張宇宙空間に固定した共動座標系のこと。この系の任意の位置でCBR（宇宙背景輻射）は一様等方な黒体輻射であるとする。ただし，考える素過程のタイムスケールは宇宙膨張のタイムスケールに比べて無視できるほど短いので，（一般相対論的な）時空変化を考慮した定式化は行わない。

（7）本稿では3次元ベクトルを上に“矢印”をつけて表す。

（8）$\vec{p} = m\gamma\vec{u}$の関係がある。その“体積”要素は次の式で与えられる；

$$d^3\vec{p} = m^3\gamma^5 d^3\vec{u} = 4\pi m^3\gamma(\gamma^2-1)^{1/2}d\gamma$$

また，衝突後の物理量はそれぞれにダッシュをつけて，

$$p'^{(4)} = (E',\ \overrightarrow{p'}),\qquad k'^{(4)} = (k',\ \overrightarrow{k'})$$

と表す。衝突前の電子に固定した座標系を“実験室系”と呼び，この系での物理量にはすべて下添字“0”をつけることにする。実験室系での衝突後の量はさらにダッシュをつけて，例えば衝突後の電子と光子は

$$p_0'^{(4)} = (E_0',\ \overrightarrow{p_0'}),\qquad k_0'^{(4)} = (k_0',\ \overrightarrow{k_0'})$$

と表す。

（ii）フリー・パラメータ

基準系に戻る。衝突前の$\overrightarrow{p}$と$\overrightarrow{k}$を固定したとき，衝突後の6個のパラメータ$\overrightarrow{p'}$と$\overrightarrow{k'}$のうち4個がエネルギー・運動量保存則 $p^{(4)}+k^{(4)} = p'^{(4)}+k'^{(4)}$ の4つの関係式で拘束されるから，2個がフリー・パラメータとして残る。保存量である重心運動量ベクトル$\overrightarrow{p+k}$の方向を極として，衝突後の光子ベクトル$\overrightarrow{k'}$の“極角”と“方位角”をこれにあてるのが自然である。衝突微分断面積と衝突による電子の（＝光子の）エネルギー変化量は，この2つのフリー・パラメータに依存する形になる。後述するように“極角”はエネルギー変化率 k'/k で一意的に表せるので，われわれは独立なフリー・パラメータとして次の2つを選ぶことにする（ダッシュをつけないがどちらも衝突後の量である）；

$y \equiv k'/k,\quad z \equiv$ 衝突後の光子運動量ベクトル$\overrightarrow{k'}$の方位角

衝突後の諸量はどれもこの2つのパラメータy，zで表すことができる。

（iii）衝突回数

基準系での（衝突前の）速度がそれぞれ$\overrightarrow{u_1}$と$\overrightarrow{u_2}$である粒子群どうしが，単位時間・単位体積あたりに衝突する回数ΔNは，実験室系での両者の衝突微分断面積$\Delta\sigma_0$を使って，

$$\Delta N = \Delta\sigma_0\cdot[(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2})^2-(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2})^2]\cdot n_1 n_2$$

と表される[9]。ただし，n_1，n_2は基準系でのそれぞれの粒子の（それぞれの速度に対応する）個数密度である。両粒子を電子と光子とすると，その速度ベクトルはそれぞれ$\vec{u}$と単位ベクトルだから，

$$\Delta N = \Delta\sigma_0 \cdot (1-u\cdot \cos\theta)\cdot n_1 n_2$$

となる。ただしθは両速度ベクトルのなす角度，言い換えると（基準系での衝突前の）電子の運動量ベクトル$\vec{p}$と光子の運動量ベクトル$\vec{k}$とのなす角度である。

（iv）衝突微分断面積$\Delta\sigma_0$をフリー・パラメータy，zで表す

実験室系での$\Delta\sigma_0$は「クライン&仁科の式」（1929年）として知られている。その表式を（実験室系での）光子の衝突前後の波数k_0，k'_0で表示すると，

$$\Delta\sigma_0 = (\gamma_e^2/2)\ (k'_0/k_0)^2 \cdot \Phi(k_0,\ k'_0)\cdot d\Omega'_0$$

となる[10]。ただしr_eは電子の古典的半径（$=e^2/m$），$d\Omega'_0$はベクトル$\vec{k'_0}$の（実験室系での）立体角要素であり，また

$$\Phi(k_0,\ k'_0) = \frac{k_0}{k'_0}+\frac{k'_0}{k_0}-2\left(\frac{m}{k'_0}-\frac{m}{k_0}\right)+\left(\frac{m}{k'_0}-\frac{m}{k_0}\right)^2 \qquad (1)$$

である。

以下で$\Delta\sigma_0$を基準系でのフリー・パラメータy，zによって表す手順を書いておく。まず$\Delta\sigma_0$の中の実験室系の諸量を「ローレンツ変換」で基準系の量（下添字“0”のない量）に変える。波数k_0，k'_0は

$$k_0 = \gamma k(1-u\cdot \cos\theta) \qquad (2)$$

$$k'_0 = \gamma k'(1-u\cdot \cos\theta') = \gamma k\cdot y(1-u\cdot \cos\theta') \qquad (2')$$

と変換される。ここでθ'は$\vec{p}$と$\vec{k'}$とのなす角度であり，後述するようにy，zで表される。また $p\cdot dE\cdot d\Omega$ がローレンツ変換に対する不変量[11]――（p，

（9）ランダウ・リフシッツ『場の古典論』第6版，§12（東京図書）
（10）電子と光子の偏りには関心がないので，どちらの偏りについても平均化（衝突前）と和（衝突後）をとったものである。
（11）ランダウ・リフシッツ『場の古典論』第6版，§10（東京図書）

E, $d\Omega$ はそれぞれ粒子の運動量の大きさ，エネルギー，運動量方向の立体角要素) —— であることを利用して，これを実験室系と基準系での（衝突後の）光子運動量ベクトル$\vec{k'_0}$, $\vec{k'}$に適用すると，

$$k'_0 \cdot dk'_0 \cdot d\Omega'_0 = k' \cdot dk' \cdot d\Omega'$$

となるから式（2′）を使って，

$$d\Omega'_0 = \gamma^{-2} \cdot (1 - u \cdot \cos\theta')^{-2} \cdot d\Omega'$$

となる。右辺の$d\Omega'$は $\vec{p}+\vec{k}$ を極軸として[12]その極角と方位角を χ', z とすると

$$d\Omega' = d(\cos\chi') \cdot dz$$

である。残るはθ', χ'をy, zで表示することである。

まず$\cos\theta'$は方位角zを使って次式で表される（Appendix A）；

$$\cos\theta' = \cos\alpha \cdot \cos\chi' - \sin\alpha \cdot \sin\chi' \cdot \sin z \tag{3}$$

ただしαは $\vec{p}+\vec{k}$ と $\vec{p}$ とのなす角度であり，$g = |\vec{p}+\vec{k}| / (m\gamma)$ として

$$\cos\alpha = (u + q \cdot \cos\theta) / g \tag{4}$$

$$g = (q^2 + u^2 + 2qu \cdot \cos\theta)^{1/2} \tag{5}$$

で表される。また極角χ'はパラメータyと次の関係がある（Appendix B）

$$\cos\chi' = \frac{q+1}{g} - \frac{1 - u \cdot \cos\theta}{g} \cdot \frac{1}{y} \tag{6}$$

$$\therefore\ d(\cos\chi') = [(1 - u \cdot \cos\theta) / g] \cdot y^{-2} \cdot dy$$

以上から，望む結果が次式で得られる；

$$\Delta\sigma_0 = \left(\frac{r_e^2}{2\gamma^2}\right) \frac{1}{g(1 - u \cdot \cos\theta)} \Phi(y, z) \cdot dydz \tag{7}$$

ここで$\Phi(y, z)$は，式（1）の$\Phi(k_0, k'_0)$において，その中のk'_0を式（2′）〜（7）を使ってy, zで表し，かつk_0を式（2）を使って衝突前の量で表したものである。

---

(12) 上の$\Delta\sigma_0$の表式は立体角要素$d\Omega'_0$の極方向を$\vec{k_0}$にしている。従って，基準系での立体角要素$d\Omega'$は，この$\vec{k_0}$（=実験室系での重心運動量ベクトル）を基準系に「ローレンツ変換」した重心運動量ベクトル$\vec{p}+\vec{k}$を極方向にしたものである。

（v）エネルギー・ロス率の（積分前の）表示

1個の電子が1個の光子との（1回の）衝突で失うエネルギーは

$$E-E' = k'-k = k(y-1) = m\gamma q(y-1)$$

だから，運動量 $[\vec{p},\ \vec{p}+d^3\vec{p}]$ の電子群が運動量 $[\vec{k},\ \vec{k}+d^3\vec{k}]$ の光子群との衝突によって単位時間・単位体積あたりに失うエネルギー（エネルギー・ロス率）は

$$\begin{aligned}&(E-E')\cdot\Delta N\\&= m\gamma q(y-1)\cdot\Delta\sigma_0\cdot(1-u\cdot\cos\theta)\cdot n_1 n_2\end{aligned}$$

である。個数密度n_1，n_2を電子と光子の分布関数 $F_e(\vec{p})$，$F_r(\vec{k})$ で表すと，

$$n_1 = F_e(\vec{p})\cdot d^3\vec{p}\ ;\quad \iiint F_e(\vec{p})\cdot d^3\vec{p} = n_e$$

$$n_2 = F_r(\vec{k})\cdot d^3\vec{k}\ ;\quad \iiint F_r(\vec{k})\cdot d^3\vec{k} = n_r$$

である（n_e，n_rは基準系での電子と光子の個数密度)。式（7）とこれを代入すると，積分する前のエネルギー・ロス率が，

$$\begin{aligned}&L(\vec{p},\ \vec{k},\ y,\ z)\cdot d^3\vec{p}\cdot d^3\vec{k}\cdot dy\cdot dz\\&= \left(\frac{r_e^2 m}{2\gamma}\right)\frac{q(y-1)}{g}\,\Phi(y,\ z)dydz\cdot F_e(\vec{p})d^3\vec{p}\cdot F_r(\vec{k})d^3\vec{k}\end{aligned}$$

で与えられる。これ以降は，

衝突後のパラメータに関する積分；　$\int dz$,　$\int dy$

衝突前のパラメータに関する積分；　$\iiint d^3\vec{p}$,　$\iiint d^3\vec{k}$

を順次実行すれば，輻射場の中の電子ガスの（単位体積・単位時間あたりの）エネルギー・ロス率Lの完全な表式を得ることができる。

なお，積分 $\iint dydz$ を実行した段階で，運動量ベクトルがそれぞれ$\vec{p}$，$\vec{k}$である。“単色”の電子ガスと“単色”の光子ガスどうしの衝突によるエネルギー・ロス率が得られ，これにさらに積分 $\iiint d^3\vec{k}$ を実行すると，黒体輻射場の中を走る運動量ベクトル$\vec{p}$の“単色”の電子ガスのエネルギー・ロス率が，それぞれ副産物として得られる。(対応する分布関数をデルタ関数にすればよい)。

§ 4　計算（積分の実行）

上記の４種類の積分のうち，積分結果が初等関数で表せるのは初めの２つだけ（z積分とy積分）である。その後は級数展開による近似計算を行う。ここでは計算過程の詳細は省略し，チェック用にフォローするとき道筋が分かる程度の概要を記しておく。

（ｉ）zについての積分

§３(iv)の末尾で述べた$\Phi(y,\ z)$だけがzの関数である。この依存性はΦの中のk_0'が式（３）の$\cos\theta'$を通じて，次のようにzに依存することによる；

$$k_0' = m\gamma^2 qy\cdot(a+b\cdot\sin z)$$

ただし，a，bは式（２′）（３）から

$$a \equiv 1-u\cdot\cos\alpha\cdot\cos\chi',\quad b \equiv u\cdot\sin\alpha\cdot\sin\chi' \qquad (8)$$

である$(a>|b|)$。$\Phi(y,\ z)$ を $z=[0,\ 2\pi]$ で積分した結果は，次の初等関数になる；

$$G(y) \equiv \int_0^{2\pi}\Phi(y,\ z)\cdot dz$$
$$= 2\pi\cdot[h_1+h_2\cdot y\cdot a+h_3\cdot y^{-1}\cdot(a^2-b^2)^{-1/2}+h_4\cdot y^{-2}\cdot a\cdot(a^2-b^2)^{-3/2}]$$

ただし

$$t \equiv 1-u\cdot\cos\theta \qquad (>0)$$

として，

$$h_1 \equiv (\gamma^2 qt)^{-2}+2(\gamma^2 qt)^{-1}$$
$$h_2 \equiv t^{-1}$$
$$h_3 \equiv -2(\gamma^2 q)^{-1}+t\ -2(\gamma^2 q)^{-2}\cdot t^{-1}$$
$$h_4 \equiv (\gamma^2 q)^{-2}$$

である。ここでh_1〜h_4はyによらないが，a，bは式（６）のχ'を通じてyの関数であることに注意する。

（ii）yについての積分

式（6）で与えられたyと極角 $\chi'(0 \leqq \chi' \leqq \pi)$ の関係；

$$y = t/[(q+1)-g\cdot \cos\chi']$$

において $(q+1) > g > 0$ が確かめられるから，yの範囲は $[y_1,\ y_2]$ となる。ただし

$$y_{1,2} \equiv t/[(q+1)\pm g] \qquad (9)$$

である。yに依存する部分 $(y-1)\cdot G(y)$ をこの範囲で積分する；

$$Y \equiv \int_{y_1}^{y_2}(y-1)G(y)\cdot dy$$

$G(y)$の中の a, a^2-b^2 は式（8）（6）を使ってyで explicit に表される。例えば後者は次のようになる(13)；

$$a^2-b^2 = A[(y+B)^2+C]/y^2$$

$$A \equiv q^2t^2/g^2$$

$$B \equiv (1-\gamma^2 t)/(q\gamma^2 t)$$

$$C \equiv [u^2-(1-t)^2]/(q^2\gamma^2 t^2)$$

y積分そのものは初等的だが，労力の大半は積分した結果をコンパクトな形に整理することに費やされる。積分結果の中で t は $\gamma^2 t$ の形でのみ現れるので，新しいパラメータwと関数Qを，

$$w \equiv \gamma^2 t = \gamma^2(1-u\cdot\cos\theta)$$

$$Q = \gamma^2[(q+1)^2-g^2] = 2q\gamma^2 t+1 = 2wq+1$$

と定義して(14)，整理した結果を書き下す。

$$H \equiv Y/(2\pi g) \equiv H_1+H_2\cdot \ln Q \qquad (10)$$

$$qH_1 = \frac{5}{6}-\left(\frac{5}{6}+\frac{14}{3w}\right)\frac{1}{q}+\left(\frac{11}{2w}-\frac{45}{8w^2}\right)\frac{1}{q^2}$$

---

(13)　A, B, Cはa^2-b^2に式（8）と式（6）を代入して整理したもの。このとき式（4）を使ってαを消去してある。結果は予想外にコンパクトな形にまとめられた。なお，y積分した後の式を再整理する際には次の関係式が有用（添字“1，2”と符号“±”とは同順）；

$$[(y_{1,2}+B)^2+C]^{1/2} = y_{1,2}(1\pm u\cdot\cos\alpha)/\sqrt{A}$$

ここで$y_{1,2}$は式（9）で定義されたものである。

(14)　運動学的不変量のひとつを $s = (p^{(4)}+k^{(4)})^2$ として，Qの中のwqは $(s^2-m^2)/2m^2$ に等しい。

$$+\left(\frac{1}{4w}-\frac{1}{3w^2}\right)\frac{1}{q^2Q}+\left(\frac{5}{12w}-\frac{1}{8w^2}\right)\frac{1}{q^2Q^2}$$
$$-\left(\frac{1}{6w}-\frac{1}{12w^2}\right)\frac{1}{q^2Q^3}$$
$$qH_2 = -1+\left(1+\frac{1}{w}\right)\frac{1}{q}-\left(\frac{2}{w}-\frac{5}{w^2}\right)\frac{1}{q^2}-\left(\frac{3}{w}-\frac{3}{w^2}\right)\frac{1}{q^3}$$

関数Hは衝突前の，光子のエネルギー（波数）q，電子の速さu，光子と電子の運動量ベクトルのなす角度θ，の3つだけに依存する量である。衝突後のフリー・パラメータは積分されて消えている。

この段階で，エネルギー・ロス率は

$$L(\overrightarrow{p},\ \overrightarrow{k})\cdot d^3\overrightarrow{p}\cdot d^3\overrightarrow{k}$$
$$=(\pi r_e^2 m/\gamma)\cdot qH\cdot F_r(\overrightarrow{k})d^3\overrightarrow{k}\cdot F_e(\overrightarrow{p})d^3\overrightarrow{p}$$

と書ける。この副産物として，ともに方向の定まった“単色”の電子ビーム（運動量$\overrightarrow{p}$）と光子ビーム（運動量$\overrightarrow{k}$）とが，任意の角度θで衝突するとき，つまり，

$$F_e(\overrightarrow{p_1})=n_e\cdot\delta(\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p}),\quad F_r(\overrightarrow{k_1})=n_r\cdot\delta(\overrightarrow{k_1}-\overrightarrow{k})$$

のとき（n_e, n_rは基準系でのそれぞれの個数密度，δはディラックのデルタ関数），電子ビームのエネルギー・ロス率の厳密な表式が

$$L(\overrightarrow{p},\ \overrightarrow{k})=(\pi r_e^2 m n_e n_r/\gamma)\cdot qH$$

で与えられる[15]。両ビームのなす角度θによって，電子ビームがエネルギーを失うか($L>0$)得るか($L<0$)が異なる。光子が低エネルギー($q\ll 1$)であるとして，上式でqの最低次数をとると，

$$qH=(8/3)q\cdot w(w-1)$$

だからLの正負が逆転する境目は$w=1$である。境目の角度 $\theta=\cos^{-1}u$は，電子が低速($u\ll 1$)のときは$\sim\pi/2$ だが，例えば電子速度が$u=1/2$（光速の半分）のときは$=\pi/3$だから，斜め後方から“追いかけて”くる

(15) 普通の単位系に戻るにはcを光速，$\hbar$をプランク定数（を2πで割ったもの）として，パラメータq, uをそれぞれ$k/(mc\gamma)$, u/cに変え，また，この係数部分を$\pi r_e^2 mc^3 n_e n_r/\gamma$に変えればよい。

光子と衝突しても電子はエネルギーを失う[16]。qの2次の項までとると，境目の角度はもっと小さくなって $\cos^{-1}u-(q/\gamma u)$ となることが分かる。

（iii）光子と電子の運動量ベクトル$\overrightarrow{k}$，$\overrightarrow{p}$についての積分[17]

T_r，T_eをそれぞれ光子ガス（黒体輻射）と電子ガスの温度として

$$\beta_r \equiv m/T_r, \quad \beta_e \equiv m/T_e$$

と定義する。残る積分は $x=k/T_r$ として（$\therefore q=\beta_r^{-1}\gamma^{-1}x$）

$$F_r(\overrightarrow{k})d^3\overrightarrow{k}=\frac{n_rT_r^3}{2\pi^2}\cdot\frac{x^2}{e^x-1}dx\cdot d(\cos\theta)$$

$$=\frac{n_rT_r^3}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}\cdot\frac{x^2}{e^x-1}dxds$$

$$F_e(\overrightarrow{p})d^3\overrightarrow{p}=\frac{n_e}{D}\gamma\sqrt{\gamma^2-1}\cdot\exp(-\beta_e\gamma)\cdot d\gamma$$

についての積分である（Dは規格化定数）。ただし後の積分の便宜のために角度θのかわりに変数 $s=\gamma(1-u\cdot\cos\theta)$ を使用した（$\therefore w=\gamma s$）。

整理すると

$$L(p,\ k)\cdot d^3\overrightarrow{p}\cdot d^3\overrightarrow{k}=[r_e^2mn_rn_eT_r^3/(2\pi D)]$$
$$\times qH\frac{x^2}{e^x-1}dx\cdot ds\cdot\exp(-\beta_e\gamma)\cdot d\gamma$$

となる。それぞれの変数の積分範囲は

$$x=[0,\ \infty],\quad s=[\exp(-\cosh^{-1}\gamma),\ \exp(\cosh^{-1}\gamma)],$$
$$\gamma=[1,\ \infty]$$

である。

qHの中の $Q=2wq+1$ は Q^{-1}，Q^{-2}，Q^{-3}，$\ln Q$ の形で現れる。

そこで

$$\gamma x<\beta_r/4 \tag{11}$$

---

(16) 光子ビームを風にたとえると，"常識的" センスでは向かい風（$\theta>\pi/2$）のとき電子はエネルギーを失い，追い風（$\theta<\pi/2$）ではエネルギーを得る。相対論的効果のためにこの境目の角度 $\cos^{-1}\theta$ が $\pi/2$よりも小さくなっている。

(17) この積分には初等関数で表せないものが多く含まれる。一例を挙げれば式 (10) の $qH_2\cdot\ln Q$の中のある項を角度変数$d(\cos\theta)$で積分するとき$a\neq 0$として$\int[\ln(t+a)/t]dt$ の形の積分になる。

の範囲では $2wq = 2\beta_r^{-1}sx < 4\beta_r^{-1}\gamma x < 1$ だから，これらを$2wq$で冪級数展開することが出来る。展開してxの同冪項で整理した結果のqHを次の形に書いておく（負冪の項と定数項は消える！）；

$$qH = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2\beta_r^{-1}sx)^n\cdot\left\{\frac{n+1}{2}U_n+\frac{n+2}{2}V_n\cdot s\gamma\right\}$$

係数U_n, V_nは（後述の係数A_n, B_nとともに）Appendix C に記してあるが$n \gg 1$で $\propto n$となる有理数である。

変数sの変域は級数の収束条件(11)と無関係だから，まずこの積分を行う。結果は

$$qH = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}W_n(\gamma)\cdot(2\beta_r^{-1}x)^n \tag{12}$$

$$W_n(\gamma) \equiv U_n\cdot \sinh\{(n+1)\cosh^{-1}\gamma\} + V_n\cdot\gamma\cdot \sinh\{(n+2)\cosh^{-1}\gamma\}$$

となる[(18)]。xとγは変数分離された形になっている。

この表式が有効であるための条件(11)と抵触しないようにxとγについての積分を工夫する。宇宙の"晴れ上がり"後は輻射温度は$T_r < 3000\mathrm{K}$だから($m = 6\cdot10^9\mathrm{K}$)

$$\beta_r \equiv m/T_r > 2\cdot10^6$$

である[(19)]。十分に大きな定数ξ, ηを次のように定義する；

$$\xi\eta \equiv \beta_r/4 \qquad \therefore \quad \xi\eta > 5\cdot10^5$$

積分変数(x, γ)の範囲を，

領域A； $x = [0,\ \xi]$ と $\gamma = [1,\ \eta]$ の積集合

領域B； $x = [\xi,\ \infty]$ と $\gamma = [\eta,\ \infty]$ の和集合

に分ける。条件(11)を満たすのは領域Aである。Appendix D で示したように，領域Bでの積分値の上限は $\xi^m\eta^n$ (m, $n = 2 \sim 5$)に $e^{-\xi}$, $e^{-\eta}$ を掛け

---

(18) $n \to \infty$のときこのsinhの項はどちらも$\to \gamma^n$になる。

(19) 赤方偏移をzとして $T_r = 3000[(1+z)/10^3]$ だから，β_rは $\beta_r = 2\cdot10^6[(1+z)/10^3]^{-1}$ である。よってβ_rは"時間" zとともに"晴れ上がり"時点での値($= 2\cdot10^6$)よりも増大する。

たオーダーになり，ξ，ηを十分に大きくとればこれを無視することが出来る。

領域Aでは級数(12)を項別積分してよい。$x=[0,\ \xi]$についての積分に際して級数の第n項の被積分関数 $x^{n+2}/(e^x-1)$ はnが大きいとき$x\sim n$でピークを持ち，その両側で減衰する。そこでξに近い大きな整数をM_0（$=\xi$としてよい）と定義し，級数を以下の3つのグループに分ける。

$$\sum_{n=1}^{M}\equiv P_1,\qquad \sum_{n=M}^{M'}\equiv P_2,\qquad \sum_{n=M'}^{\infty}\equiv P_3$$

ただしM，M'はM_0を間に挟む大きな整数であり，ここでは近似の精度を評価するために具体的に$M=(1/2)M_0$，$M'=(3/2)M_0$と決めておく($M,\ M'\gg 1$)。これらP_1，P_2，P_3は，ピークの位置が積分境界ξの十分内側にある項，境界の前後にある項，境界を越えて十分遠方にある項，をそれぞれ集めたものである。Appendix Dで示したように，$\xi\gg 1$とすれば，領域AでのP_2，P_3の積分値の上限($=\delta,\ \delta'$)，および領域Bでのもとの関数（式(10)のqH）の積分値の上限（$=\varepsilon$）は，どれも領域AでのP_1の積分値の下限（$=\Delta$）に比べて微小な値になる。；

$$\Delta\gg\varepsilon\gg\delta\gg\delta'$$

しかも$\xi=20\sim40$程度にとればこれが可能である（このとき$\eta\sim10^4$）。つまり級数P_1の項数$M(=\xi/2)$をせいぜい$M=10\sim20$項ほどにするだけで良好な近似になる。従ってわれわれはx，γに関する積分を，有限級数P_1の領域Aでの積分値で代用することにする。

P_1のx積分は——(各項のピークの位置が積分境界ξに比べて十分小さいから)——積分範囲を［0，∞］としてもかまわない。積分結果は次のようになる；

$$-\sum_{n=1}^{M}(-2\beta_r^{-1})^n(n+2)!\ \zeta(n+3)\,W_n(\gamma)\tag{13}$$

ここでζはリーマンのツェータ関数である。[20]

なおこの段階で，黒体輻射の中にある任意の速度分布を持つ電子ガスのエネルギー・ロス率が次のように書ける；

$$L(\vec{p})d^3\vec{p} = -\frac{r_e^2 m n_r T_r^3}{2\pi}\cdot\frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\cdot F_e(\vec{p})d^3\vec{p}$$
$$\times\sum_{n=1}^{M}(-2\beta_r^{-1})^n(n+2)!\ \zeta(n+3)W_n(\gamma)$$

この近似式が有効である範囲は $\gamma\xi<\beta_r/4$　つまり

$$\gamma < 5\cdot 10^5/\xi$$

である。例えば$\xi\sim 50$としたとき，仮に電子ガスが相対論的($\gamma\gg 1$)であっても $\gamma<10^4$ なら十分通用すると考えてよい。

最後に電子の“速度”$\gamma=[1,\ \eta]$について積分する。上述した分布関数の規格化定数Dは，第二種 modified Bessel 関数$K_\nu(z)$を使って

$$D = 2\beta_e^{-2}\cdot K_1(\beta_e)+\beta_e^{-1}\cdot K_0(\beta_e)$$

である。[21] 積分範囲の上限を∞としてよいことをチェックしておく。nが大きいとき $W_n(\gamma)\propto\gamma^{n+1}$ だから，有限級数 (13) の第n項の被積分関数は$n\gg 1$で $\gamma^{n+1}\cdot\exp(-\beta_e\gamma)$ であり，これはほぼ$\gamma\sim n/\beta_e$にピークを持つ。よって，ピークの最大位置M/β_eがηに比べて小さいという条件M/β_e ($=\xi/2\beta_e$)$\ll\eta$ を満たせば$\gamma=[1,\ \infty]$についての積分で置き換えてよい。これと $\xi\eta>5\cdot 10^5$ を組み合わせると，この条件は次のように書ける；

$$\beta_e = m/T_e \gg (\xi/10^3)^2$$

これは電子ガスの温度に上限 $\ll m(10^3/\xi)^2\sim 6\cdot 10^{15}\cdot\xi^{-2}$[K] を課すが，上述したように近似は$\xi\sim 40$程度ですでに十分良好だったから，この条件はガスが極端な高温（$\sim 10^{12}$K）である場合を除いて満たされている。（それにこういう高温ではコンプトン散乱は主要な過程ではなくなるから，本稿の計算そのものが意味を失う）。

---

(20) $\xi(z)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}$で定義される。$z$＝整数（≧２）のときはほぼ～１の程度の数である。

(21) ランダウ・リフシッツ『統計物理学』第３版，§38（岩波書店）。このDは $K_2(\beta_e)/\beta_e$ に等しい。

γについての積分は次のものを実行すればよい（ただし$m=0,1$）。結果とともに記す；（Appendix E）

$$\int_1^{\infty}\exp(-\beta_e\gamma)\cdot\gamma^m\cdot\sinh[(n+1+m)\cosh^{-1}\gamma]\cdot d\gamma$$

$$=\begin{cases}(n+1)\ \beta_e^{-1}\cdot K_{n+1}(\beta_e) & ;(m=0)\\ (n+2)\ \beta_e^{-1}\cdot[K_{n+1}(\beta_e)+(n+3)\beta_e^{-1}\cdot K_{n+2}(\beta_e)] & ;(m=1)\end{cases}$$

これを使って最終的なエネルギー・ロス率は

$$L(\beta_e,\ \beta_r)=[r_e^2m\cdot n_rn_eT_r^3/(2\pi D)]\cdot\Sigma P_n$$

と表示される。ただし

$$P_n\equiv(-2\beta_r^{-1})^{n-1}\cdot(n+2)!\cdot\zeta(n+3)\cdot$$
$$\times[A_n\cdot\beta_e^{-1}\cdot K_{n+1}(\beta_e)+B_n\cdot\beta_e^{-2}\cdot K_{n+2}(\beta_e)]$$

であり，この数係数A_n, B_nはAppendix Cに記してある。

Appendix (A)

以下はすべて基準系での話である。ベクトル $\vec{g}\equiv(\vec{p}+\vec{k})/m\gamma$ の方向を極方向にし，これをA軸とした適当な右手系（A, B, C）軸をとる。この座標系でベクトル$\vec{k'}$の極角と方位角をそれぞれχ', zとしたから，

$$k'=k'_A\cdot e_A+k'_B\cdot e_B+k'_C\cdot e_C$$
$$\vec{k'_A}=\vec{k'}\cdot\cos\vec{\chi'},\quad \vec{k'_B}=k'\cdot\sin\chi'\cdot\cos z$$
$$k'_c=k'\cdot\sin\chi'\cdot\sin z$$

である。ただし$\vec{e_A}$, $\vec{e_B}$, $\vec{e_C}$はそれぞれA，B，C軸方向の単位ベクトルである。

ベクトル$\vec{p}$をx軸方向にとりベクトル$\vec{k}$を（x, z）平面内にとっても任意性を失わない。するとベクトル$\vec{g}$つまりA軸は（x, z）平面内にあるから，それと直交するB軸をy軸と一致するようにとれる。$\vec{p}$と$\vec{g}$のなす角度がαだったから，右手系（A, B, C）は右手系（x, y, z）を，y軸を回転軸として，（x, z）平面内で角度αだけ回転したものである。従って，x方向の単位ベクトルを$\vec{i_x}$とすると，

$$\overrightarrow{e_A}\cdot\overrightarrow{i_x} = \cos\alpha, \qquad \overrightarrow{e_B}\cdot\overrightarrow{i_x} = 0,$$

$$\overrightarrow{e_C}\cdot\overrightarrow{i_x} = \cos[\alpha+(\pi/2)] = -\sin\alpha,$$

の関係がある。

ベクルト$\overrightarrow{k'}$のx成分k'_xは（$\overrightarrow{p}$と$\overrightarrow{k'}$のなす角度がθ'だから）

$$k'_x = \overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{e_x} = k'\cdot\cos\theta'$$

である。一方，

$$\begin{aligned} k'_x &= \overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{i_x} = (k'_A\cdot\overrightarrow{e_A}+k'_B\cdot\overrightarrow{e_B}+k'_C\cdot\overrightarrow{e_C})\cdot\overrightarrow{i_x} \\ &= (\overrightarrow{e_A}\cdot\overrightarrow{i_x})\cdot k'_A+(\overrightarrow{e_B}\cdot\overrightarrow{i_x})\cdot k'_B+(\overrightarrow{\mathbf{e}_C}\cdot\overrightarrow{i_x})\cdot k'_C \\ &= \cos\alpha\cdot k'_A-\sin\alpha\cdot k'_C \\ &= k'(\cos\alpha\cdot\cos\chi'-\sin\alpha\cdot\sin\chi'\cdot\sin z) \end{aligned}$$

よって

$$\cos\theta' = \cos\alpha\cdot\cos\chi'-\sin\alpha\cdot\sin\chi'\cdot\sin z$$

これが求めるものである。

Appendix（B）

実験室系でのエネルギー運動量保存則 $p_0'^{(4)} = p_0^{(4)}+k_0^{(4)}-k_0'^{(4)}$ の両辺を2乗して整理すると（Θ'_0は$\overrightarrow{k_0}$と$\overrightarrow{k'_0}$とのなす角度）

$$p_0^{(4)}\{k_0^{(4)}-k_0'^{(4)}\} = k_0^{(4)}\cdot k_0'^{(4)}$$

$$\therefore\ m(k_0-k'_0) = k_0k'_0(1-\cos\Theta'_0)$$

$$\therefore\ \cos\Theta'_0 = 1-m[(1/k'_0)-(1/k_0)]$$

4スカラー$\{p^{(4)}+k^{(4)}\}\cdot k'^{(4)}$の基準系での値は

$$(m\gamma+k)k'-(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{k})\cdot\overrightarrow{k'}$$

$$(m\gamma+k)k'-(m\gamma g)k'\cdot\cos\chi'$$

同じく実験室系での値は

$$\begin{aligned} &(m+k_0)k'_0-\overrightarrow{k_0}\cdot\overrightarrow{k'_0} \\ &= (m+k_0)k'_0-k_0k'_0\cdot\cos\Theta'_0 \\ &= mk_0 \end{aligned}$$

この両者は等しい。その等式に $k_0=\gamma k(1-\cos\theta)$, $y=k'/k$, $q=k/(m\gamma)$ を代入して本文の式（6）が得られる。

Appendix（C）

$n\geqq 1$ として

$$U_n=\frac{2}{n+1}\left\{-\frac{(n-1)(n+5)}{6}-\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{20}{n+2}-\frac{24}{n+3}\right\}$$

$$V_n=\frac{2}{n+2}\left\{\frac{n^2+2n-6}{3}-\frac{2}{n+1}-\frac{8}{n+2}+\frac{24}{n+3}\right\}$$

この最初の 3 項は

$$(U_n,\ V_n)=\left(-\frac{4}{3},\ \frac{9}{8}\right),\ \left(-\frac{64}{45},\ \frac{7}{5}\right),\ \left(-\frac{7}{4},\ \frac{49}{25}\right)$$

であり $n\to\infty$ で $(U_n,\ V_n)\to\left(-\frac{n}{3},\ \frac{2n}{3}\right)$ に近づく。

本文の式 (14) の係数は

$$A_n\equiv(n+1)U_n+(n+2)V_n$$
$$=\frac{n^2-7}{3}-\frac{2}{n}-\frac{8}{n+1}+\frac{24}{n+2}$$

$$B_n\equiv(n+2)(n+3)V_n$$
$$=2(n+3)\left\{\frac{n^2+2n-6}{3}-\frac{2}{n+1}-\frac{8}{n+2}+\frac{24}{n+3}\right\}$$

最初の 3 項は

$$(A_n,\ B_n)=\left(\frac{17}{24},\ \frac{81}{2}\right),\ \left(\frac{4}{3},\ 28\right),\ \left(\frac{14}{5},\ \frac{294}{5}\right)$$

であり n→∞で $(A_n,\ B_n)\to\left(\frac{n^2}{3},\ \frac{2n^3}{3}\right)$ に近づく。

Appendix（D）

（1）領域Bでの積分値の上限の評価

それぞれの定義式から出る（全域で通用する）不等関係

$$Q^{-1}<1,\quad \gamma^{-1}<1,\quad w^{-1}<2,\quad \ln Q<2wq<q$$

などを使うと，本文の式 (10) の絶対値の緩やかな上限は，

$$x^2\cdot q\,|H|<\beta_r^{-1}\gamma^{-1}x^3+c_1x^2+c_2\beta_r\gamma x+c_3\beta_r^2\gamma^2$$

と見積もられる（数係数は$c_1 \sim 4$，$c_2 \sim 35$，$c_3 \sim 74$）。変数sに関する積分はこれを

$$\sinh(\cosh \gamma^{-1}) < \cosh(\cosh \gamma^{-1}) = \gamma$$

倍するだけだから，

$$\int x^2 \cdot q\,|H|\cdot ds$$
$$< \beta_r^{-1} x^3 + c_1 \gamma x^2 + c_2 \beta_r \gamma^2 x + c_3 \beta_r^2 \gamma^3$$

となる。領域Bでの上限値はこの右辺に $(e^x - 1)^{-1} \cdot \exp(-\beta_r \gamma)$
を掛けて積分；

$$\int_\xi^\infty dx \cdot \int_1^\infty d\gamma + \int_0^\infty dx \cdot \int_\eta^\infty d\gamma \;\equiv\; S_1 + S_2$$

を実行して得られる。ただし$x = [\xi, \infty]$，$\gamma = [\eta, \infty]$の積集合の部分が重複するが，ここではそれぞれの指数関数による減衰が二重にかさなるために，この部分の寄与は無視できる。

第二種不完全ガンマ関数$\Gamma(m, p)$の$p \gg 1$での漸近級数の式

$$\Gamma(m, p) \equiv \int_p^\infty z^{m-1} e^{-z} \cdot dz$$
$$\sim p^{m-1} e^{-p} \cdot [1 + \sum_{r=1}^{N} \{(m-1)(m-2)\cdots(m-r)/p^r\} + O(p^{-N-1})]$$

を使うと［　］内の第2項以下は無視できて（われわれの場合，mは整数＝1，2，3である）

$$\Gamma(m, p) \sim p^{m-1} e^{-p}$$

としてよいから，第1と第2の積分において，それぞれ

$$\int_\xi^\infty x^m (e^x - 1)^{-1} dx \sim \int_\xi^\infty x^m e^{-x} dx \sim \xi^m e^{-\xi}$$

$$\int_\eta^\infty \gamma^m \cdot \exp(-\beta_e \gamma) d\gamma \sim \quad \eta^m e^{-\eta \beta_e}$$

である（$\eta\beta_e \gg 1$とする）。ただしS_2の中の，xについての全域の積分$\int_0^\infty dx$において，被積分関数の中に定数項（x^0の項）があるために積分が発散する。定数項が出たのは絶対値の操作によるものであって，実際には$x^2 qH$の$x \to 0$での最低次数はx^3である。われわれはこの“定数項”のx（全域）積分の値を適当な定数にしておく。以上から$a_1 \sim b_4$を適当な正の数係数とし

て，上限値 $\varepsilon = S_1 + S_2$ は

$$S_1 = e^{-\xi} e^{-\beta_e} [a_1 \beta_r^{-1} \beta_e^{-1} \xi^3 + a_2 (\beta_e^{-2} + \beta_e^{-1}) \xi^2 + a_3 \beta_r (2\beta_e^{-3} + 2\beta_e^{-2} + \beta_e^{-1}) \xi + a_4 \beta_r^2 (6\beta_e^{-4} + 6\beta_e^{-3} + 3\beta_e^{-2} + \beta_e^{-1})]$$

$$S_2 = e^{-\eta\beta_e} [b_1 \beta_r^{-1} + b_2 \eta + b_3 \beta_r \eta^2 + b_4 \beta_r^2 \eta^3]$$

オーダーの比較のために$\beta_e = 1$とする（この設定は$\eta\beta_e \gg 1$である限り本質的でない)。$\xi\eta = \beta_r/4$を使って主要項だけを残し，数係数を省略すると

$$S_1 \sim \xi^2 \eta^2 \cdot e^{-\xi}$$

$$S_2 \sim \xi^2 \eta^5 \cdot e^{-\eta}$$

である。

（2）級数P_2, P_3の領域Aでの積分値の上限の評価

nが大きいところでは$W_n \sim (1/3) n (2\gamma - 1) \gamma^n \equiv a \cdot n\gamma^n$

だから$\rho \equiv \gamma / \eta (\leqq 1)$とおいて

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot W_n(\gamma) \cdot (2\beta_r x)^n \sim a \cdot \sum n \{-\rho x / (2\xi)\}^n$$

xの積分範囲内で$0 \leqq x/(2\xi) \leqq 1/2$であることを考慮して主要項だけを残すと，$P_2 (= \sum_{n=M}^{M'})$ と $P_3 (= \sum_{n=M'}^{\infty})$ の絶対値の上限は，ほぼ次のように見積もられる($M = \xi/2$, $M' = 3\xi/2$; $\xi \gg 1$)

$$|P_2| < |a| \cdot 2M \{\rho x / (2\xi)\}^M \leqq |a| \cdot 2M \{x / (2\xi)\}^M$$

$$|P_3| \leqq a \cdot 2M' \{x / (2\xi)\}^{M'}$$

x積分に寄与する位置は$x \gg 1$だから$[e^x - 1]^{-1}$をe^{-x}とおいてよく，求めるのが上限値だから範囲を［0，∞］としてよい。

$$\therefore \left| \int_0^{\xi} P_2 \cdot (e^x - 1)^{-1} \cdot x^2 dx \right|$$
$$< |a| \cdot 2M (2\xi)^{-M} \cdot \int_0^{\infty} x^{M+2} \cdot e^{-x} \cdot dx$$
$$= |a| \cdot 2M (2\xi)^{-M} \cdot (M+2)!$$
$$< |a| \cdot \xi^{7/2} \cdot (1/2)^{\xi} \cdot e^{-\xi/2}$$

これにγ積分を行う（同じ理由で範囲を［1，∞］としてよい)。

$$\int_1^{\infty} |a| \cdot \exp(-\beta_e \gamma) d\gamma$$

$$= e^{-\beta_e}\cdot f(\beta_e) \qquad ; f(\beta_e) = (2/3)\beta_e^{-2} + \beta_e^{-1}$$

よって，上限は次の値になる；

$$e^{-\beta_e}\cdot f(\beta_e)\cdot\xi^{7/2}\cdot(1/2)^{\xi}\cdot e^{-\xi/2} \equiv \delta$$

同様にP_3の上限値は，数係数を省略して

$$e^{-\beta_e}\cdot f(\beta_e)\cdot\xi^{7/2}\cdot(3/4)^{3\xi/2}\cdot e^{-3\xi/2} \equiv \delta'$$

となる。ちなみに両者の比は

$$\delta'/\delta = (4e/3\sqrt{3})^{-\xi} = (2.09)^{-\xi} \ll 1$$

だからP_2を無視する誤差の方が大きい。

（3）級数P_1の積分値の下限との比較

上限値の大きい方（δ）をP_1の積分値の下限と比較する。P_1の級数和は初項と同オーダーだから，初項との比較で十分である。初項の下限は（数係数を省略して）ほぼ $\sim\beta_r^{-1}\gamma x$ であり，これのx積分もγ積分も，被積分関数のピークの位置がそれぞれξ，ηに比べて小さいから，領域を∞まで広げても大差はない。$g(\beta_e) = \beta_e^{-2} + \beta_e^{-1}$として

$$\int_0^\infty x(e^x-1)^{-1}\cdot x^2 dx \sim (2/5)\pi^4 \sim 40$$

$$\int_1^\eta \gamma\cdot \exp(-\beta_e\gamma)d\gamma \sim e^{-\beta_e}\cdot g(\beta_e)$$

だから，積分の下限値Δはほぼ（zは赤方偏位；本文の注（19）を参照）

$$\Delta = 40\cdot\beta_r e^{-\beta_e}\cdot g(\beta_e)$$

$$= 2\cdot 10^{-5}\cdot[(1+z)/10^3]\cdot e^{-\beta_e}\cdot g(\beta_e)$$

となる。よって比δ/Δは（$f\sim g$として）次の値である；

$$10^5\cdot[(1+z)/10^3]^{-1}\cdot Z(\xi)$$

ただしZは

$$Z(\xi) \equiv \xi^{7/2}(1/2)^{\xi}e^{-\xi/2} = \xi^{7/2}(3.3)^{-\xi}$$

$$\therefore Z(10) = 2\cdot 10^{-2}, \quad Z(24) = 2.4\cdot 10^{-8}, \quad Z(30) = 4\cdot 10^{-11}$$

である。これを見ると時期$1+z = 10^3 \sim 1$に応じて$\xi = 24 \sim 10$で$\delta \ll \Delta$となる。つまり級数P_1，P_2，P_3の領域Ａでの積分値をP_1のそれで代表させるこ

とは，有限級数P_1の項数M（$=\xi/2$）を$M=12\sim5$とすれば十分に良い近似になることが分かる。

ただし，Mを小さくとったとき($\xi\ll\eta$)上の（1）で概算した領域Bでの積分の上限値 S_1, S_2 は $S_2\ll S_1\sim\xi^2\eta^2e^{-\xi}=(\beta_r/4)^2e^{-\xi}$ であり，その大きい方S_1とΔとの比は（β_eに関するたかだか整関数どうしの比を無視して）；

$$S_1/\Delta\sim10^{16}\cdot[(1+z)/10^3]^{-3}\cdot e^{-\xi}$$

となる。これが1に比べて小さいための条件は，

$$\xi>\xi_0=16+6.9\cdot\log_{10}(1+z)$$

である。$1+z=10^3\sim1$に応じて$\xi_0=37\sim18$となる。従ってこの条件を満たすためには，問題とする時期zに応じて級数の項数$M(>\xi_0/2)$を$M=20\sim10$とすれば十分である。Mをもう少し増やすだけで近似度は格段に向上する。なお，このとき比δ/Δはそれぞれ $7\cdot10^{-16}\sim2\cdot10^{-4}$ だから，級数P_2, P_3の寄与を無視する近似も満たされている。級数の項数がこの程度の少数項だけで済むのは数値計算上きわめて便利である。

Appendix（E）

次の積分を計算する（これをf_mとおく）。ただし$m=0, 1$である。

$$\int_1^\infty\exp(-\beta_e\gamma)\cdot\gamma^m\cdot\sinh[(n+1+m)\cosh^{-1}\gamma]\cdot d\gamma$$

f_1はf_0に$-(\partial/\partial\beta_e)$をほどこし，かつ$n$を$n+1$に変えればよいから，積分は$f_0$だけで済む。積分変数を$x=\cosh^{-1}\gamma$に変えて，

$$\begin{aligned}f_0&=\int_0^\infty\exp(-\beta_e\cdot\cosh x)\cdot\sinh\{(n+1)x\}\cdot\sinh x\cdot dx\\&=(1/2)\int_0^\infty\exp(-\beta_e\cdot\cosh x)\\&\qquad\times[\cosh\{(n+2)x\}-\cosh(nx)]\cdot dx\end{aligned}$$

だから，第二種 modified Bessel 関数$K_\nu(z)$の積分表示；

$$K_\nu(z)=\int_0^\infty\exp(-z\cosh x)\cdot\cosh\nu x\cdot dx$$

を使うと

$$f_0 = (1/2)[K_{n+2}(\beta_e) - K_n(\beta_e)]$$
$$= (n+1)\beta_e^{-1} \cdot K_{n+1}(\beta_e)$$

となる。よって

$$f_1 = (-\partial/\partial\beta_e)[(n+2)\beta_e^{-1} \cdot K_{n+2}(\beta_e)]$$
$$= (n+2)\beta_e^{-1}[K_{n+1}(\beta_e) + (n+3)\beta_e^{-1} \cdot K_{n+2}(\beta_e)]$$

である。